


600038056S

THÉORIE MÉCANIQUE

DE

LA CHALEUR,

PAR

Charles BRIOT,
PROFESSEUR À LA FACULTÉ DES SCIENCES,

DEUXIÈME ÉDITION

PUBLIÉE

Par M. E. MASCART,
Professeur au Collège de France, Directeur du Bureau central météorologique.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55,

1883

9034 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Augustins, 55.

THÉORIE MÉCANIQUE
DE
LA CHALEUR,

PAR

CHARLES BRIOT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

DEUXIÈME ÉDITION

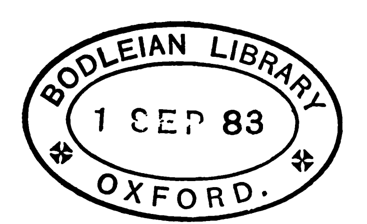
PUBLIÉE

PAR M. E. MASCART,
Professeur au Collège de France, Directeur du Bureau central météorologique.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1883


BODLEIAN LIBRARY
1 SEP 83
OXFORD.

PRÉFACE

DE LA DEUXIÈME ÉDITION.

Pendant les dernières années de son enseignement à la Sorbonne, M. Briot était revenu à plusieurs reprises sur la Théorie mécanique de la chaleur; les progrès de la science l'avaient conduit à introduire dans ses leçons plusieurs modifications importantes qu'il mit à profit pour une nouvelle édition de son Ouvrage, épuisé depuis longtemps.

Nous signalerons, par exemple, dans la première Partie, qui comprend la Thermodynamique, le Chapitre relatif aux propriétés physiques des corps, où la discussion des lignes isothermes permet de grouper, dans un même ordre d'idées, les expériences si remarquables de M. Andrews sur l'état critique des gaz, en même temps que les phénomènes de sursaturation et de surfusion, la notion de l'entropie, si heureusement imaginée par M. Clausius, la vitesse du son, deux Chapitres nouveaux sur les applications de la Théorie de la chaleur à la Mécanique céleste et sur les phénomènes capillaires, etc. L'idée de la propagation de la force et les vues ingénieuses de M. W. Thomson sur la thermo-électricité complètent l'Électrostatique et la théorie des courants

électriques. L'Électromagnétisme et l'Électrodynamique ont été exposés d'une manière beaucoup plus simple, en prenant pour point de départ la considération des feuillets magnétiques, qui conduisent directement à l'assimilation des courants électriques et des aimants. Enfin, la théorie de l'induction a été remaniée.

L'impression de cette seconde édition était déjà commencée lorsque M. Briot fut enlevé à l'affection des siens et à l'estime de tous ceux qui l'ont connu. La rédaction était en grande partie terminée, et nous avons trouvé, dans les manuscrits de l'auteur, des indications suffisantes sur le plan des Chapitres inachevés pour les reconstituer en restant dans le même esprit. Nous avons mis tous nos soins à respecter le caractère d'une œuvre à laquelle M. Briot attachait une importance particulière; notre ambition se borne à espérer que l'on retrouvera ici, sans lacunes, cette clarté et cette précision qu'il savait donner à toutes les publications qui sont sorties de ses mains.

E. MASCART.

Juillet 1883.

PRÉFACE

DE LA PREMIÈRE ÉDITION.

Ce Livre est la reproduction de mon Cours à la Sorbonne pendant l'année scolaire 1867-1868. Il est divisé en deux Parties, comprenant, l'une les phénomènes thermiques proprement dits, l'autre les phénomènes électriques. La Théorie mécanique de la chaleur a pris en peu d'années une telle extension, qu'elle embrasse aujourd'hui presque toute la Physique; elle ramène à une même mesure, l'unité mécanique du travail, les manifestations si variées des forces naturelles. Mon but a été d'exposer les principes fondamentaux de cette science nouvelle, en les déduisant, autant que cela peut se faire aujourd'hui, des lois générales de la Mécanique.

J'ai beaucoup emprunté à l'Ouvrage célèbre de M. Clausius, Ouvrage formé de la réunion de ses Mémoires originaux sur cette matière. J'ai eu recours aussi aux travaux remarquables de MM. W. Thomson et Rankine. Dans le Chapitre relatif à l'écoulement des fluides, j'ai fait des emprunts au Livre de M. Zeuner, où cette question est traitée avec détail. En ce qui concerne l'induction électrique, j'ai adopté la formule de M. Weber, qui non seulement comprend, comme cas particuliers, la loi de

Coulomb et celle d'Ampère, c'est-à-dire l'ensemble des phénomènes d'électricité statique et d'électricité dynamique, mais qui rend compte aussi des phénomènes d'induction. Cette loi de Weber paraît destinée à jouer un rôle prépondérant dans l'étude de l'électricité.

Je fais hommage de mon Livre, et c'est pour moi un acte de justice et une satisfaction du cœur, à la Mémoire de mon collègue Verdet, dont la mort prématurée a été une perte si grande pour la Science. La Théorie mécanique de la chaleur était devenue son étude de prédilection; il l'a professée pendant deux années à la Sorbonne; j'ai été assez heureux pour assister à ses Leçons; quelques-uns de ses élèves les ont recueillies et les publient en ce moment. Le lecteur trouvera dans les Leçons de Verdet le complément des miennes; je me suis attaché surtout à la partie théorique; les Leçons de Verdet contiennent des détails précieux sur les expériences qui ont servi de base à la théorie, ou qui en confirment les conséquences, une critique sûre et approfondie de la valeur et de la portée de ces expériences, dont les plus importantes sont dues à MM. Regnault et Joule.

Je dois des remercîments à M. Mascart, qui a rédigé mes Leçons, et qui a bien voulu m'aider dans le travail de revision et de perfectionnement nécessaire à leur publication.

THÉORIE MÉCANIQUE

DE

LA CHALEUR.

INTRODUCTION.

1. On explique la propagation de la lumière et de la chaleur rayonnante par les vibrations d'un milieu élastique qui est répandu dans l'espace et qui pénètre tous les corps. On regarde ce milieu, qu'on appelle *éther*, comme formé d'*atomes* situés à distance et exerçant les uns sur les autres des actions répulsives dirigées suivant les droites qui joignent les atomes deux à deux; ces actions sont proportionnelles aux masses des atomes et fonctions des distances qui les séparent.

2. Les corps que nous appelons *pondérables* sont aussi formés d'atomes exerçant les uns sur les autres des actions à distance. Pour expliquer les phénomènes de réfraction, il faut admettre que la densité moyenne de l'éther n'est pas la même dans les milieux réfringents que dans le vide, et par suite que la matière pondérable exerce une influence sur les atomes d'éther. Supposons, par exemple, que cette action soit attractive : chaque atome pondérable sera alors entouré d'une atmosphère d'éther dont la densité est plus grande que dans le vide et décroît rapidement à partir du centre; l'excès d'éther accumulé autour de chaque atome est la masse de cette atmosphère. D'après cela, l'action totale qui s'exerce entre deux atomes pondérables de masses m et m' peut être considérée

comme la résultante de deux forces, l'une attractive, provenant des masses pondérables elles-mêmes, l'autre répulsive, provenant de la réaction mutuelle des deux atmosphères d'éther. Si, pour simplifier, on suppose que les expressions de ces deux forces soient de la forme

$$\frac{mm'a}{r^n}, \quad \frac{mm'b}{r^{n+p}},$$

r étant la distance des deux atomes, l'action résultante sera

$$\varphi = \frac{mm'a}{r^n} - \frac{mm'b}{r^{n+p}} = \frac{mm'a}{r^n}\left(1 - \frac{b}{ar^p}\right)$$

ou, en posant $r_0^p = \frac{b}{a}$,

$$\varphi = \frac{mm'a}{r^n}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^p\right].$$

Il y a une position d'équilibre pour la distance $r = r_0$.

La force est répulsive quand la distance est plus petite que r_0, et elle augmente à l'infini quand la distance devient de plus en plus petite. Elle est au contraire attractive quand la distance est plus grande que r_0; elle acquiert sa valeur maximum à la distance $r_1 = r_0 \sqrt[p]{\frac{n+p}{n}}$, et elle diminue ensuite de manière à devenir infiniment petite à une distance très grande.

3. Concevons maintenant qu'un certain nombre d'atomes constituent un groupe régulier sous l'influence de leurs actions mutuelles; ce groupe sera une *molécule*. L'action d'une molécule A ainsi formée sur une molécule B n'a pas, en général, de résultante unique; elle se ramène à une force appliquée au centre de gravité de la molécule B et à un couple; le couple fait tourner la molécule B et l'oriente d'une certaine façon par rapport à la molécule A; la force est attractive ou répulsive et il y a une position d'équilibre. On peut expliquer de cette manière la *cristallisation*.

4. En résumé, on se représente les corps comme formés d'atomes que l'on assimile à des points matériels agissant les

uns sur les autres. L'action qui s'exerce entre deux points consiste en deux forces égales et de sens contraires, l'une appliquée au premier point, l'autre appliquée au second point. Cette double force est proportionnelle au produit des masses des points matériels et fonction de la distance qui les sépare; c'est une attraction ou une répulsion suivant qu'elle tend à rapprocher ou à écarter les points matériels; elle tend à les ramener vers leur position d'équilibre quand ils en ont été écartés par une cause étrangère.

5. De ces déplacements résultent des mouvements vibratoires intérieurs qui peuvent affecter différentes formes : — ou les atomes matériels oscillent dans la molécule dont ils font partie; c'est ce qui paraît avoir lieu lorsqu'un métal, mis dans une flamme, se vaporise et devient lumineux; la nature de la lumière émise par la molécule métallique, c'est-à-dire le nombre des vibrations par seconde, dépend du nombre des atomes qui la constituent et de leur disposition géométrique (¹); — ou es molécules tournent sur elles-mêmes, soit d'un mouvement oscillatoire, soit d'un mouvement continu; dans ce cas, l'influence de la forme de la molécule disparaît en partie; elle disparaîtrait même complètement si la rotation était continue et si les axes de rotation des molécules étaient orientés dans tous les sens; — ou les molécules se déplacent les unes par rapport aux autres, soit qu'elles oscillent autour de leurs positions d'équilibre, ce qui a lieu dans les corps solides, soit qu'elles soient animées de mouvements de translation rectilignes, dans diverses directions qui changent à chaque instant par les chocs des molécules entre elles; c'est ainsi que l'on se représente la constitution des gaz et des vapeurs.

L'ensemble de tous ces mouvements constitue la *chaleur*. Les mouvements calorifiques, produisant des changements dans l'état physique des corps, et principalement dans leur volume, donnent naissance à des actions extérieures; par exemple, quand un corps se dilate sous l'influence de la chaleur, il repousse les corps environnants. Réciproquement, une ac-

---

(¹) *Note sur les mouvements intérieurs des molécules,* par M. Briot (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 1868).

tion extérieure, comme une pression, s'exerçant sur un corps, peut modifier les mouvements moléculaires et produire des phénomènes calorifiques. La *Thermodynamique* est l'étude des relations qui existent entre les phénomènes calorifiques, leurs causes et leurs effets. La chaleur, considérée ainsi comme un mouvement, rentre dans les lois générales de la Mécanique, et la Thermodynamique a pour bases les principes de la Mécanique rationnelle.

PRÉLIMINAIRES.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT DES SYSTÈMES.

Force. — Travail. — Masse. — Force vive. — Mouvement des systèmes. — Mouvement du centre de gravité. — Théorème des moments des quantités de mouvement. — Théorème des forces vives. — Travail des forces intérieures. — Conservation de l'énergie. — Énergie des mouvements vibratoires. — Influence du mouvement vibratoire sur l'énergie potentielle. — Cas où il y a des forces extérieures. — Travail des pressions extérieures.

Force.

6. Nous acquérons l'idée de *force* par le sentiment de notre propre activité, quand nous agissons sur les corps extérieurs, pour les déplacer, ou les modifier d'une manière quelconque. Lorsque nous soutenons un corps pour l'empêcher de tomber, l'effort plus ou moins grand que nous exerçons nous donne l'idée de la grandeur de la force. Quand nous traînons un corps sur un plan horizontal, à l'aide d'une corde, la droite suivant laquelle se dispose la corde tendue nous donne l'idée de la direction de la force; le point du corps où est attachée la corde est le point d'application de la force.

Nous assimilons à notre propre activité l'action musculaire des animaux, et, par analogie, nous étendons cette idée à toutes les forces physiques, comme la pesanteur, la pression du vent, celle de la vapeur, les attractions ou répulsions électriques ou magnétiques, etc. Nous arrivons ainsi à la notion générale de la force considérée comme une grandeur ayant une direction déterminée. L'unité de force est le *kilogramme*.

Travail.

7. La considération simultanée de la force et du déplacement du point d'application conduit à la notion complexe du *travail*

des forces. Quand le déplacement du point d'application a lieu dans la direction de la force, le travail est le produit de la force par le déplacement du point d'application. L'unité de travail est le *kilogrammètre*, c'est-à-dire le travail nécessaire pour élever un kilogramme à un mètre de hauteur. L'unité de travail dépend à la fois de l'unité de force, le kilogramme, et de l'unité de longueur, le mètre. Lorsque le déplacement du point d'application s'effectue dans une direction quelconque, le travail est le produit de la force par la projection du déplacement sur la direction de la force. Enfin, dans le cas général, lorsque la force est variable et le déplacement curviligne, on considère le déplacement comme une suite de déplacements rectilignes infiniment petits, et l'on fait la somme des travaux élémentaires.

Masse.

8. L'expérience nous apprend que, pour imprimer à différents corps un même mouvement, il faut leur appliquer des forces inégales : de là vient la notion de *masse*. On dit que deux corps ont des masses égales lorsque, partant du repos et sollicités par des forces égales, ils prennent le même mouvement. Le rapport des masses de deux corps est égal à celui des forces qui leur impriment le même mouvement. L'unité de masse est la masse d'un corps qui, sollicité par une force égale à un kilogramme, acquiert après l'unité de temps, c'est-à-dire après une seconde, une vitesse égale à un, c'est-à-dire une vitesse de un mètre par seconde. D'après cela, l'unité de masse dépend à la fois de l'unité de force, le kilogramme, de l'unité de longueur, le mètre, et de l'unité de temps, la seconde.

Force vive.

9. Quand un corps est en mouvement, la considération simultanée de la masse du corps et de la vitesse qu'il possède conduit à la notion d'une quantité complexe à laquelle on a donné le nom de *force vive*. Nous appellerons *force vive* d'un corps en mouvement la moitié du produit de sa masse par le carré de sa vitesse. Voici d'où provient cette dénomination. On remarque d'abord que, si un corps de masse m est en repos, pour lui

imprimer une vitesse v il faut dépenser une quantité de travail moteur égale à $\frac{mv^2}{2}$. Réciproquement, lorsqu'un corps de masse m est en mouvement et possède une vitesse v, s'il rencontre une résistance qui diminue peu à peu sa vitesse et l'amène au repos, il accomplit un travail égal à $\frac{mv^2}{2}$, travail égal à celui qu'a accompli la force motrice pour mettre le corps en mouvement, s'il était primitivement en repos.

Dans le premier cas, une certaine quantité de travail se change en une quantité égale de force vive communiquée au corps; dans le second cas, au contraire, la force vive que possède le corps en mouvement se change en travail. On démontre, d'une manière générale, que, lorsqu'un corps est soumis à des forces quelconques, la variation de sa force vive, pendant un certain temps, est égale à la somme algébrique des travaux de toutes les forces qui agissent sur le corps, pendant le même temps.

Pour bien comprendre cette transformation du travail en force vive, et réciproquement, imaginons deux ressorts à boudin, identiques et placés en regard l'un de l'autre. On comprime le premier ressort à la main, puis on introduit un taquet métallique pour empêcher le ressort de se détendre; le travail que l'on a effectué pour comprimer le ressort, et dont on a parfaitement conscience, est en quelque sorte emmagasiné dans le ressort. On place devant ce ressort une bille de masse m, et l'on soulève le taquet; le ressort se détend, pousse la bille et lui communique une quantité de force vive $\frac{mv^2}{2}$, égale au travail développé par le ressort pendant sa détente, travail qui est égal au travail effectué primitivement à la main pour la compression du ressort. La bille, lancée avec la vitesse v, vient frapper le second ressort et le comprime progressivement jusqu'à ce que sa vitesse soit nulle, et, au moment où la vitesse est nulle, on introduit un taquet pour empêcher le ressort de se détendre. La bille en mouvement a opéré sur le second ressort une compression égale à celle que la main avait effectuée sur le premier; le travail est le même, et par conséquent égal à la quantité de force vive que possédait la bille; cette quantité

de travail effectuée par la bille en mouvement est actuellement emmagasinée dans le second ressort. Si l'on soulève le taquet, le second ressort, en se détendant, restitue cette quantité de travail et communique à la bille une quantité égale de force vive; la bille, venant frapper le premier ressort, le comprime, et sa force vive se change de nouveau en travail, et ainsi de suite.

Telles sont les quatre notions fondamentales sur lesquelles repose la Mécanique, savoir : les notions de force et de travail des forces, et, parallèlement, celles de masse et de force vive des corps. L'idée de masse correspond à la force, celle de force vive au travail (1).

Mouvement des systèmes.

10. Considérons un système de points matériels soumis en même temps à leurs actions mutuelles et à des forces extérieures. Il est clair que le mouvement de chaque point matériel est produit par l'ensemble des forces, tant intérieures qu'extérieures, qui agissent sur lui. Si donc on appelle m la masse d'un point matériel, x, y, z ses coordonnées par rapport à trois axes fixes rectangulaires, X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, ... les composantes des forces qui agissent sur ce point, on aura les trois équations

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + X_1 + \ldots, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + Y_1 + \ldots, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + Z_1 + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Chacun des points du système donne lieu à trois équations de

(1) Leibnitz, qui a introduit cette notion dans la Science, appelait *force vive* d'un corps en mouvement le produit de sa masse par le carré de sa vitesse. Mais, comme le travail que le corps en mouvement est capable d'accomplir n'est que la moitié de ce produit, nous proposons, par un léger changement à l'usage, de donner le nom de *force vive* à cette moitié.

même forme. On peut déduire de ces équations plusieurs théorèmes importants.

Mouvement du centre de gravité.

11. En ajoutant membre à membre toutes les équations qui se rapportent à l'axe des x, et de même celles qui se rapportent à l'axe des y ou à l'axe des z, on a les trois équations suivantes :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \sum m \frac{d^2x}{dt^2} &= \sum \mathrm{X}, \\ \sum m \frac{d^2y}{dt^2} &= \sum \mathrm{Y}, \\ \sum m \frac{d^2z}{dt^2} &= \sum \mathrm{Z}, \end{aligned}\right.$$

ou bien

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{D}_t \sum m \frac{dx}{dt} &= \sum \mathrm{X}, \\ \mathrm{D}_t \sum m \frac{dy}{dt} &= \sum \mathrm{Y}, \\ \mathrm{D}_t \sum m \frac{dz}{dt} &= \sum \mathrm{Z}. \end{aligned}\right.$$

Le signe somme, dans le premier membre, s'étend à tous les points du système, et, dans le second membre, à toutes les forces qui agissent sur ces différents points. Comme les forces intérieures sont deux à deux égales et opposées, leurs projections sont égales et de signes contraires, et par conséquent disparaissent des seconds membres des équations (3). Ces équations ne renferment donc que les forces extérieures; on en conclut :

Théorème I. — *La dérivée par rapport au temps de la somme des projections, sur un axe fixe quelconque, des quantités de mouvement de tous les points d'un système est égale à la somme des projections des forces extérieures sur cet axe.*

12. Si les points du système ne sont soumis à aucune force extérieure, les seconds membres des équations précédentes

sont nuls; on en déduit les trois équations

$$(4)\qquad \begin{cases} \sum m \dfrac{dx}{dt} = A, \\ \sum m \dfrac{dy}{dt} = B, \\ \sum m \dfrac{dz}{dt} = C, \end{cases}$$

dans lesquelles A, B, C sont des quantités constantes. Ainsi :

COROLLAIRE. — *Quand un système de points matériels n'est soumis à aucune force extérieure, la somme des projections des quantités de mouvement de tous les points du système sur un axe fixe quelconque est constante.*

13. La considération du centre de gravité du système permet d'énoncer le théorème précédent d'une autre manière. Si l'on appelle x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité et M la masse totale, on a

$$(5)\qquad \begin{cases} M x_1 = \sum m x, \\ M y_1 = \sum m y, \\ M z_1 = \sum m z, \end{cases}$$

et les équations (2) prennent la forme

$$(6)\qquad \begin{cases} M \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = \sum X, \\ M \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} = \sum Y, \\ M \dfrac{d^2 z_1}{dt^2} = \sum Z. \end{cases}$$

THÉORÈME II. — *Le mouvement du centre de gravité d'un système est le même que si toute la masse y était concentrée et toutes les forces extérieures transportées parallèlement à elles-mêmes.*

COROLLAIRE. — *Quand un système n'est soumis à aucune force extérieure, le centre de gravité reste en repos, ou se meut d'un mouvement rectiligne et uniforme.*

Théorème des moments des quantités de mouvement.

14. Si l'on multiplie la première des équations (1) par y, la deuxième par x et que l'on retranche la première de la seconde membre à membre, on a

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=x(Y+Y_1+\ldots)-y(X+X_1+\ldots).$$

En ajoutant toutes les équations de même sorte qui se rapportent aux différents points du système, on obtient l'équation

$$\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\sum(xY-yX).$$

En combinant de même la deuxième des équations (1) avec la troisième et la troisième avec la première, on a les trois équations

$$(7)\quad\begin{cases}\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\sum(xY-yX),\\ \sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\sum(yZ-zY),\\ \sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)=\sum(zX-xZ),\end{cases}$$

ou bien

$$(8)\quad\begin{cases}D_t\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\sum(xY-yX),\\ D_t\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\sum(yZ-zY),\\ D_t\sum m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=\sum(zX-xZ).\end{cases}$$

L'expression $xY-yX$ est le moment d'une force F par rapport à l'axe des z. Comme les forces intérieures sont deux à deux égales et opposées, leurs moments par rapport à un

axe quelconque sont égaux et de signes contraires; les forces intérieures disparaissent donc des seconds membres. De même l'expression $m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$ représente le moment, par rapport à l'axe des z, de la quantité de mouvement du point matériel m. Ainsi :

THÉORÈME III. — *La dérivée par rapport au temps de la somme des moments, par rapport à un axe fixe quelconque, des quantités de mouvement des différents points d'un système est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport au même axe.*

15. Si le système n'est soumis à aucune force extérieure, les seconds membres des équations qui précèdent sont nuls; on en déduit

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=C',\\ &\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=A',\\ &\sum m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=B',\end{aligned}\right.$$

A′, B′, C′ étant des quantités constantes. Ainsi :

COROLLAIRE. — *Quand un système n'est soumis à aucune force extérieure, la somme des moments des quantités de mouvement, par rapport à un axe fixe quelconque, est constante.*

16. Ce théorème peut être appliqué à un axe mobile de direction constante et passant par le centre de gravité. Appelons, comme précédemment, x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité et ξ, η, ζ les coordonnées d'un point matériel quelconque par rapport à des axes menés par le centre de gravité parallèlement aux axes fixes; si dans la première des équations (7) on remplace x, y, z par leurs valeurs

$$x=x_1+\xi,\quad y=y_1+\eta,\quad z=z_1+\zeta,$$

et si l'on remarque que

$$\sum m\xi=0,\quad \sum m\eta=0,\quad \sum m\zeta=0,$$

on a

$$M\left(x_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} - y_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}\right) + \sum m\left(\xi \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2 \xi}{dt^2}\right)$$

$$= x_1 \sum Y - y_1 \sum X + \sum (\xi Y - \eta X).$$

En vertu des équations (6), cette équation se simplifie et devient

$$\sum m\left(\xi \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2 \xi}{dt^2}\right) = \sum (\xi Y - \eta X);$$

elle a même forme que les équations (7).

Théorème des forces vives.

17. On sait que la variation de la force vive d'un point matériel, pendant un temps quelconque, est égale à la somme des travaux des forces qui agissent sur ce point, pendant le même temps. Si l'on fait la somme de toutes les équations semblables qui se rapportent aux différents points du système, on obtient l'équation

$$(10) \qquad \Delta \sum \frac{mv^2}{2} = \sum \mathfrak{T} F,$$

$\mathfrak{T} F$ désignant le travail de la force F. Ainsi :

Théorème IV. — *La variation de la somme des forces vives de tous les points d'un système, pendant un temps quelconque, est égale à la somme des travaux de toutes les forces, tant intérieures qu'extérieures, qui agissent sur ces différents points, pendant le même temps.*

Appliquons ce théorème à un déplacement infiniment petit. Soient ds le déplacement du point m, dx, dy, dz ses projections sur les axes des coordonnées; le travail d'une force F appliquée à ce point étant égal à la somme des travaux de ses composantes, on a

$$\text{trav. élém. de } F = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

et, par suite,

$$(11) \qquad d \sum \frac{mv^2}{2} = \sum (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

18. Il existe une relation très simple entre la force vive du mouvement d'un système par rapport à des axes fixes et celle de son mouvement par rapport à des axes mobiles, de directions constantes, et passant par le centre de gravité du système.

Désignons, comme au n° 16, par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité, et par ξ, η, ζ les coordonnées d'un point matériel quelconque par rapport à des axes menés par le centre de gravité, parallèlement aux axes fixes; on a

$$\begin{aligned}\sum \frac{mv^2}{2} = & \ \frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right] \\ & +\frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right] \\ & + \ \sum m\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\xi}{dt}+\frac{dy_1}{dt}\frac{d\eta}{dt}+\frac{dz_1}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right).\end{aligned}$$

Si l'on appelle v la vitesse du centre de gravité, u celle d'un point quelconque par rapport aux axes mobiles passant par le centre de gravité, et si l'on remarque que les dernières sommes sont nulles, l'équation précédente se réduit à

$$\sum \frac{mv^2}{2} = \frac{\mathrm{M}\,\mathrm{v}^2}{2} + \sum \frac{mu^2}{2}. \tag{12}$$

Ainsi :

THÉORÈME V. — *La force vive d'un système est égale à la force vive de la masse entière supposée concentrée au centre de gravité, plus la force vive de ce système dans son mouvement relatif à des axes de directions constantes passant par le centre de gravité.*

19. Ceci va nous permettre d'étendre au mouvement relatif le théorème des forces vives. L'équation (11) devient en effet

$$\begin{aligned} d\frac{\mathrm{M}\,\mathrm{v}^2}{2} + d\sum\frac{mu^2}{2} = & \left(\sum \mathrm{X}.dx_1 + \sum \mathrm{Y}.dy_1 + \sum \mathrm{Z}.dz_1\right) \\ & + \sum(\mathrm{X}\,d\xi + \mathrm{Y}\,d\eta + \mathrm{Z}\,d\zeta).\end{aligned}$$

Mais nous avons démontré (n° 13) que le mouvement du centre

de gravité est le même que si toute la masse y était concentrée et toutes les forces transportées parallèlement à elles-mêmes. En appliquant à ce point de masse M le principe des forces vives, on a

$$d\frac{\mathrm{M}v^2}{2} = \sum \mathrm{X}.dx_1 + \sum \mathrm{Y}.dy_1 + \sum \mathrm{Z}.dz_1,$$

et l'équation précédente se réduit à

$$(13) \qquad d\sum \frac{mu^2}{2} = \sum (\mathrm{X}\,d\xi + \mathrm{Y}\,d\eta + \mathrm{Z}\,d\zeta).$$

Ainsi le théorème des forces vives subsiste quand on considère le mouvement relatif du système par rapport à des axes de directions constantes passant par le centre de gravité :

Théorème VI. — *Si l'on évalue la force vive de chaque point et le travail de chaque force dans le mouvement relatif à des axes de directions constantes passant par le centre de gravité, la variation de la somme des forces vives de tous les points du système est égale à la somme des travaux de toutes les forces, tant intérieures qu'extérieures, qui agissent sur ces différents points.*

Travail des forces intérieures.

20. Dans l'application du théorème des forces vives, il est bon de distinguer les forces intérieures des forces extérieures. L'action mutuelle de deux molécules m et m', dont la distance est r, se compose de deux forces égales et opposées $mm'\varphi(r)$, appliquées, l'une au premier point, l'autre au second point, et dirigées suivant la droite qui les joint. La fonction $\varphi(r)$ est positive ou négative, suivant que la force est attractive ou répulsive. Soient x, y, z les coordonnées du point m par rapport aux axes fixes, x', y', z' celles du point m'; les composantes de la force appliquée en m sont

$$\mathrm{X} = mm'\varphi(r)\frac{x'-x}{r},$$

$$\mathrm{Y} = mm'\varphi(r)\frac{y'-y}{r},$$

$$\mathrm{Z} = mm'\varphi(r)\frac{z'-z}{r},$$

et le travail élémentaire de cette force dans le mouvement absolu a pour expression

$$\begin{aligned} & \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz \\ & \quad = mm'\frac{\varphi(r)}{r}\left[(x'-x)\,dx + (y'-y)\,dy + (z'-z)\,dz\right]. \end{aligned}$$

De même, le travail élémentaire de la force appliquée au point m' est

$$\begin{aligned} & -(\mathrm{X}\,dx' + \mathrm{Y}\,dy' + \mathrm{Z}\,dz') \\ & \quad = -\frac{mm'\varphi(r)}{r}\left[(x'-x)\,dx' + (y'-y)\,dy' + (z'-z)\,dz'\right]. \end{aligned}$$

En ajoutant ces deux quantités, on a le travail élémentaire de l'action mutuelle des deux molécules :

$$\begin{aligned} -\frac{mm'\varphi(r)}{r} & \left[(x'-x)(dx'-dx)\right. \\ & \left. + (y'-y)(dy'-dy) + (z'-z)(dz'-dz)\right]. \end{aligned}$$

Or l'équation

$$r^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$$

donne

$$r\,dr = (x'-x)(dx'-dx) + (y'-y)(dy'-dy) + (z'-z)(dz'-dz).$$

L'expression du travail devient ainsi

$$-mm'\varphi(r)\,dr = mm'\,d\,\psi(r),$$

si l'on désigne par $\psi(r)$ une fonction ayant pour dérivée $-\varphi(r)$.

La somme des travaux élémentaires des forces intérieures sera donc

$$\sum mm'd\psi(r) = d\sum mm'\psi(r).$$

Il y a dans le second membre autant de termes que de combinaisons des points matériels deux à deux.

Cette expression ne renfermant que les distances mutuelles des points du système, il est clair que le travail des forces in-

térieures est le même dans le mouvement relatif que dans le mouvement absolu.

La distance r de deux points s'exprimant par les différences des coordonnées des deux points, la quantité $\sum mm'\psi(r)$ est une fonction des coordonnées de tous les points du système, fonction que nous désignerons par $f(x, y, z, x', y', z', \ldots)$, et qui ne dépend que des positions relatives des points les uns par rapport aux autres. La somme des travaux élémentaires des forces intérieures est la différentielle totale $df(x, y, z, x', y', z', \ldots)$ de cette fonction. Concevons maintenant que le système passe de l'état caractérisé par l'indice 1 à l'état caractérisé par l'indice 2, on aura, pour cette transformation finie,

$$\sum \mathfrak{T}\text{F int.} = f(x_2, y_2, z_2, x'_2, \ldots) - f(x_1, y_1, z_1, x'_1, \ldots),$$

ou plus simplement

$$\sum \mathfrak{T}\text{F int.} = f_2 - f_1. \tag{14}$$

Il sera utile, comme nous le verrons, de remplacer la fonction f par une fonction égale et de signe contraire, que nous désignerons par Π. De cette manière, la somme des travaux des forces intérieures, quand le système passe de la position [1] à la position [2], est égal à $\Pi_1 - \Pi_2$.

21. Cherchons à préciser le sens de la fonction Π. Nous avons posé

$$-\varphi(r) = \psi'(r), \quad \sum mm'\psi(r) = f \quad \text{et} \quad \Pi = -f.$$

La fonction ψ, et par conséquent les fonctions f et Π, qui en dépendent, renferment une constante arbitraire. On démontre en Mécanique que lorsque, pour un certain état du système, la valeur de la fonction f, que l'on appelle *fonction des forces*, est un maximum, cet état est un état d'équilibre stable. Si la fonction f présente plusieurs maxima, nous considérerons le plus grand d'entre eux. Or on peut concevoir que l'on ait dé-

terminé la constante de manière que ce plus grand des maxima de la fonction f soit précisément égal à zéro. De cette manière, la fonction f conservera une valeur négative, et par conséquent la fonction Π, qui lui est égale et de signe contraire, restera toujours positive.

Imaginons que le corps parte de la position d'équilibre stable qui correspond au plus grand des maxima de la fonction des forces, et vienne à sa position actuelle, le travail des forces intérieures pendant cette transformation est $f(x, y, z, \ldots) - 0$. Cette quantité négative représente le travail qu'il faut dépenser pour tirer le corps de la position d'équilibre dont nous avons parlé et l'amener à sa position actuelle. Inversement, si on laisse le corps revenir à cette position d'équilibre, les forces intérieures produiront un travail positif

$$0 - f(x, y, z, \ldots) = \Pi(x, y, z, \ldots).$$

La fonction Π représente donc le travail positif que les forces intérieures seraient capables d'effectuer, si le corps quittait la position actuelle et revenait à la position idéale d'équilibre stable, qui correspond au plus grand des maxima de la fonction des forces.

Conservation de l'énergie.

22. Supposons que le système ne soit soumis à aucune force extérieure; la variation de la somme des forces vives de tous les points du système, quand le système passe de l'état [1] à l'état [2], est égale à la somme des travaux des forces intérieures, c'est-à-dire à $f_2 - f_1$, ou à $\Pi_1 - \Pi_2$. On a donc l'équation

$$\sum \frac{mv_2^2}{2} - \sum \frac{mv_1^2}{2} = \Pi_1 - \Pi_2,$$

ou

$$\sum \frac{mv_2^2}{2} + \Pi_2 = \sum \frac{mv_1^2}{2} + \Pi_1.$$

La quantité $\sum \frac{mv^2}{2} + \Pi$, ayant la même valeur dans deux états quelconques du système, conserve une valeur constante pen-

dant toute la durée du mouvement, et l'on a

$$\sum \frac{mv^2}{2} + \text{H} = \text{const.} \tag{15}$$

Le premier membre de cette équation se compose de deux parties essentiellement positives dont la somme est constante. Ces deux parties peuvent se transformer l'une dans l'autre; quand l'une d'elles diminue, l'autre augmente d'une quantité égale. La première est la somme des forces vives de tous les points du système, la seconde le travail *potentiel* des forces intérieures, ou le travail maximum qu'elles peuvent produire. Il est utile de donner à ces deux grandeurs des noms qui rappellent leurs analogies mécaniques.

Nous adopterons les dénominations proposées par Rankine; nous appellerons *énergie cinétique* d'un système la somme des forces vives de tous les points du système, et *énergie potentielle* le travail maximum que peuvent produire les forces intérieures. La somme de ces deux quantités est l'*énergie totale*, ou simplement l'*énergie*, du système. Nous désignerons l'énergie cinétique ou la force vive par V, l'énergie potentielle par W, et l'énergie totale par U, de manière que $U = V + W$. L'équation (15) signifie que :

THÉORÈME VII. — *Lorsqu'un système n'est soumis à aucune force extérieure, son énergie reste constante.*

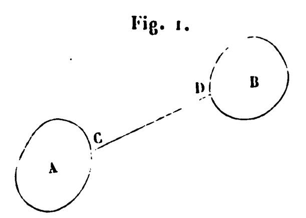
Tel est le théorème connu sous le nom de *conservation de l'énergie*. Cette énergie se compose, comme nous l'avons dit, de deux parties : la première, la force vive, dépend de la grandeur des vitesses des différents points du système; la seconde, l'énergie potentielle, de leurs positions relatives. L'exemple du ressort comprimé (n° 9) fait bien comprendre ce qu'on entend par énergie potentielle. L'énergie potentielle du ressort est le travail qu'il est capable de produire en se détendant; ce travail est égal à celui qu'il a fallu effectuer pour le comprimer.

23. Le principe de la conservation de l'énergie s'applique au mouvement relatif à des axes de directions constantes passant par le centre de gravité. Nous avons vu, en effet (n° 18), que la force vive du mouvement absolu du système est égale à la

force vive du mouvement de translation, c'est-à-dire à la force vive de la masse entière supposée concentrée au centre de gravité, plus la force vive du mouvement relatif. Si l'on désigne par V_i cette dernière force vive et par U_i l'énergie $V_i + W$ du système, quand on fait abstraction du mouvement du centre de gravité, on a $U = U_i + \frac{Mv^2}{2}$. Lorsqu'il n'y a pas de force extérieure, le dernier terme étant constant, l'*énergie intérieure* U_i conserve aussi une valeur constante.

24. Il est aisé de comprendre que l'énergie d'un corps mesure en quelque sorte sa puissance mécanique. Considérons, par exemple, deux corps A et B (*fig.* 1), unis par un fil

Fig. 1.



inextensible et sans masse CD. Supposons qu'il n'y ait pas de forces extérieures; l'énergie totale du système formé par ces deux corps restera constante. L'énergie du fil est nulle; en effet, sa masse étant nulle, sa force vive est nulle; d'autre part, comme il est inextensible, les deux tensions donnent des travaux égaux et de signes contraires, et, par suite, l'énergie potentielle du fil est aussi nulle. On a donc simplement, pour ce système, en appelant U l'énergie du corps A, et U' celle du corps B, l'équation

$$U + U' = \text{const.}$$

Les deux parties de cette somme peuvent se transformer l'une dans l'autre par l'intermédiaire du fil. Lorsque U diminue, U' augmente d'une quantité égale; c'est là ce qui caractérise l'action mécanique du corps A sur le corps B. Supposons que l'énergie U diminue jusqu'à devenir nulle, et, à ce moment, supprimons la communication des deux corps en coupant le fil; la nouvelle énergie U'' du corps B est égale, d'après

le théorème général, à la somme des deux précédentes, et l'on a

$$U'' = U + U'.$$

A partir de ce moment, l'énergie du corps A reste constamment nulle; ce corps est arrivé à un état d'équilibre stable au repos, qui persistera tant que des forces extérieures n'interviendront pas. L'énergie totale U du corps A mesure donc l'action mécanique maximum que ce corps peut exercer sur les corps extérieurs.

25. En résumant ce qui précède, on voit que, lorsqu'un système n'est soumis à aucune force extérieure, trois quantités restent constantes :

1° La somme des projections des quantités de mouvement sur un axe fixe quelconque;

2° La somme des moments des quantités de mouvement par rapport à un axe fixe quelconque, ou par rapport à un axe mobile de direction constante passant par le centre de gravité;

3° L'énergie totale, ainsi que l'énergie intérieure du système.

Énergie des mouvements vibratoires.

26. La force vive d'un système se compose, comme nous l'avons dit, de la force vive du mouvement de translation du centre de gravité et de la force vive du mouvement relatif à des axes de directions constantes passant par le centre de gravité.

Mais il y a lieu de distinguer encore dans cette dernière énergie ce qui se rapporte au mouvement sensible et ce qui se rapporte au mouvement vibratoire, qui est en général très rapide et impossible à observer directement.

La force vive de chaque molécule varie pendant sa vibration; par exemple, si la vibration est rectiligne, la force vive est nulle aux extrémités de l'oscillation et maximum au milieu. Mais un volume, même très petit, contient un grand nombre de molécules qui sont à toutes les phases de leurs oscillations. Pour évaluer la force vive de l'ensemble des molécules, il suf-

fira donc de prendre la force vive moyenne d'une molécule et de la multiplier par le nombre des molécules.

Considérons d'abord un système de points matériels sans mouvement sensible et animés seulement d'un mouvement vibratoire. Chaque point matériel oscille autour d'une position moyenne. Nous représenterons par x, y, z les coordonnées de cette position moyenne, et par $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ celles du point matériel en mouvement. Puisqu'il n'y a pas de mouvement sensible, les coordonnées x, y, z sont indépendantes du temps, et l'on a

$$v^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2.$$

On peut regarder un mouvement vibratoire quelconque comme la superposition de vibrations simples de la forme

$$\xi = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right),$$
$$\eta = B\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \beta\right),$$
$$\zeta = C\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \gamma\right).$$

Pour une vibration simple, on a

$$v^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}\left[A^2\sin^2\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right) + B^2\sin^2\left(\frac{2\pi t}{T} + \beta\right) + C^2\sin^2\left(\frac{2\pi t}{T} + \gamma\right)\right],$$

ou

$$v^2 = \frac{2\pi^2}{T^2}\left[A^2 + B^2 + C^2 - A^2\cos\left(\frac{4\pi t}{T} + 2\alpha\right) - \ldots\right].$$

La force vive varie pendant la durée d'une vibration; sa valeur moyenne est donnée par l'intégrale définie

$$(16) \qquad \frac{1}{T}\int_0^T \frac{mv^2}{2}\,dt = m\pi^2\,\frac{A^2 + B^2 + C^2}{T^2}.$$

Dans un mouvement vibratoire complexe, le carré de la vitesse a pour expression

$$v^2 = 4\pi^2 \left\{ \left[\sum \frac{A}{T}\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right)\right]^2 + \left[\sum \frac{B}{T}\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \beta\right)\right]^2 + \left[\sum \frac{C}{T}\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \gamma\right)\right]^2 \right\}.$$

$\sum \frac{A}{T}\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right)$ est une somme de termes de la forme

$$\frac{A}{T}\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right) + \frac{A'}{T'}\sin\left(\frac{2\pi t}{T'} + \alpha'\right) + \ldots;$$

son carré est

$$\sum \frac{A^2}{T^2}\sin^2\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right) + \sum \frac{2AA'}{TT'}\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi t}{T'} + \alpha'\right).$$

En transformant les termes de la première somme, comme précédemment, et prenant la moyenne pendant un temps très grand par rapport à chaque période, afin de pouvoir négliger les termes périodiques, on obtient

$$\frac{1}{2}\sum \frac{A^2}{T^2}.$$

Les termes de la deuxième somme peuvent être transformés de la manière suivante :

$$\frac{2AA'}{TT'}\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi t}{T'} + \alpha'\right)$$
$$= \frac{AA'}{TT'}\left\{\cos\left[2\pi t\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'}\right) + \alpha - \alpha'\right] - \cos\left[2\pi t\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'}\right) + \alpha + \alpha'\right]\right\}.$$

L'intégrale du second membre est une somme de sinus, et la valeur moyenne de cette intégrale pour un intervalle de temps θ, très grand par rapport à la durée de chaque période, est négligeable. On trouve ainsi, pour la valeur moyenne de la force vive du point matériel m,

$$(17) \qquad \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \frac{mv^2}{2}\,dt = m\pi^2 \sum \frac{A^2+B^2+C^2}{T^2}.$$

On conclut de là que : *L'énergie moyenne d'un mouvement vibratoire quelconque est égale à la somme des énergies moyennes des mouvements vibratoires simples qui le composent.*

27. Supposons maintenant que le corps soit animé en même temps d'un mouvement sensible et d'un mouvement vibratoire. Les coordonnées d'un point matériel m à un instant quelconque sont encore $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$; mais les coordonnées x, y, z de la position moyenne sont ici des fonctions du temps. Les composantes de la vitesse de ce point sont

$$\frac{dx}{dt}+\frac{d\xi}{dt},$$
$$\frac{dy}{dt}+\frac{d\eta}{dt},$$
$$\frac{dz}{dt}+\frac{d\zeta}{dt}.$$

Pour le point considéré, la composante $\frac{dx}{dt}$ de la vitesse sensible peut être regardée comme constante pendant la durée d'une période T, si le mouvement vibratoire est simple, ou, plus généralement, pendant un intervalle de temps θ, petit en valeur absolue, mais très grand par rapport à chacune des périodes qui entrent dans un mouvement vibratoire complexe. On a donc, approximativement,

$$\frac{1}{\theta}\int_0^\theta m\frac{dx}{dt}\frac{d\xi}{dt}\,dt = \frac{1}{\theta}\,m\frac{dx}{dt}\int_0^\theta \frac{d\xi}{dt}\,dt = \frac{1}{\theta}\,m\frac{dx}{dt}\,[\xi]_0^\theta = 0.$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned}\frac{1}{\theta}\int_0^\theta \frac{mv^2}{2}\,dt = \frac{m}{2}\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right) &\\ +\frac{1}{\theta}\int_0^\theta \frac{m}{2}\left(\frac{d\xi^2}{dt^2}+\frac{d\eta^2}{dt^2}+\frac{d\zeta^2}{dt^2}\right) &\\ +\frac{1}{\theta}\int_0^\theta m\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\xi}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{d\eta}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right)dt.&\end{aligned}$$

Les trois termes de la dernière intégrale étant négligeables, comme nous venons de le voir, il reste

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{1}{\theta}\int_0^\theta \frac{mv^2}{2}\,dt = \frac{m}{2}\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right) &\\ +\frac{1}{\theta}\int_0^\theta \frac{m}{2}\left(\frac{d\xi^2}{dt^2}+\frac{d\eta^2}{dt^2}+\frac{d\zeta^2}{dt^2}\right).&\end{aligned}\right.$$

La première partie du second membre est la force vive du mouvement sensible, la seconde est la force vive moyenne du mouvement vibratoire. On dira donc que :

L'énergie cinétique d'un corps est égale à la somme de l'énergie du mouvement sensible et de l'énergie du mouvement vibratoire.

Influence du mouvement vibratoire sur l'énergie potentielle.

28. Considérons un corps sans mouvement sensible et animé d'un mouvement vibratoire. L'énergie potentielle, qui est une fonction des distances des différents points matériels, dépend du mouvement vibratoire et varie aussi d'une manière périodique; nous nous proposons de calculer sa valeur moyenne. Représentons toujours par x, y, z les coordonnées de la position moyenne du point m; s'il n'y avait pas de mouvement vibratoire, l'énergie potentielle aurait pour valeur

$$W = F(x, y, z, x', y', z', \ldots).$$

Pendant la vibration, les coordonnées du point m sont $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$; alors l'énergie potentielle a pour valeur

$$W = F(x+\xi, y+\eta, z+\zeta, x'+\xi', \ldots).$$

Les projections ξ, η, ζ du déplacement vibratoire sont très petites par rapport à x, y, z; on peut donc développer cette fonction en série rapidement décroissante et écrire, en se bornant aux termes du second degré,

$$W = F(x, y, z, x', y', z', \ldots) + \frac{dF}{dx}\xi + \frac{dF}{dy}\eta + \frac{dF}{dz}\zeta + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\xi^2 + \frac{d^2F}{dy^2}\eta^2 + \frac{d^2F}{dz^2}\zeta^2 + 2\frac{d^2F}{dx\,dy}\xi\eta + \ldots\right).$$

La fonction W ayant une valeur minimum dans l'état d'équilibre, les dérivées premières $\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dz}, \cdots$ sont nulles, et la seconde partie est positive. Ainsi la vibration augmente l'énergie potentielle. La valeur moyenne de l'augmentation est

$$(19) \quad \frac{1}{4}\left[\frac{d^2F}{dx^2}A^2 + \frac{d^2F}{dy^2}B^2 + \frac{d^2F}{dz^2}C^2 + 2\frac{d^2F}{dx\,dy}AB\cos(\alpha - \beta) + \ldots\right].$$

On conclut de là que *la vibration augmente la valeur moyenne de l'énergie potentielle, sans que les positions moyennes des molécules soient changées,* c'est-à-dire *sans que l'état apparent du corps soit modifié.* On peut expliquer ainsi la dilatation des corps par la chaleur.

Cas où il y a des forces extérieures.

29. Nous avons trouvé l'équation des forces vives dans le cas le plus général (**17**) :

$$(20) \qquad \Delta\sum\frac{mv^2}{2} = \sum \mathfrak{G}F\text{ int.} + \sum \mathfrak{G}F\text{ ext.}$$

Si le corps a passé de l'état [1] à l'état [2], on a (nº **20**)

$$\sum \mathfrak{G}F\text{ int.} = f_2 - f_1 = \Pi_1 - \Pi_2,$$

et l'équation (20) devient

$$\Delta\sum\frac{mv^2}{2} + (\Pi_2 - \Pi_1) = \sum \mathfrak{G}F\text{ ext.},$$

ou bien

$$\Delta V + \Delta W = \sum \mathfrak{G} F \text{ ext.},$$

c'est-à-dire

$$(21) \qquad \Delta U = \sum \mathfrak{G} F \text{ ext.}$$

Ainsi :

THÉORÈME VIII. — *La variation de l'énergie d'un système est égale à la somme des travaux des forces extérieures.*

30. Nous avons vu que le théorème des forces vives subsiste dans le mouvement relatif à des axes de directions constantes passant par le centre de gravité (n° 19), et l'on a

$$\Delta \sum \frac{mu^2}{2} = \sum \mathfrak{G}' F \text{ int.} + \sum \mathfrak{G}' F \text{ ext.},$$

$\mathfrak{G}'$ désignant le travail dans le mouvement relatif. Le travail des forces intérieures étant le même dans le mouvement relatif que dans le mouvement absolu, cette équation peut être mise sous la forme

$$\Delta V_i + \Delta W = \sum \mathfrak{G}' F \text{ ext.},$$

ou

$$(22) \qquad \Delta U_i = \sum \mathfrak{G}' F \text{ ext.}$$

Ainsi :

THÉORÈME IX. — *La variation de l'énergie intérieure d'un système est égale à la somme des travaux des forces extérieures dans le mouvement relatif à des axes de directions constantes passant par le centre de gravité.*

31. Outre l'action des forces extérieures proprement dites, le corps peut recevoir une certaine quantité d'énergie calorifique qui lui vient du dehors, ou bien il peut perdre une certaine quantité d'énergie calorifique qu'il communique aux

corps extérieurs. Cet échange de chaleur a lieu par rayonnement ou par conductibilité, et voici comment on conçoit qu'il s'effectue :

Quand un corps est animé d'un mouvement vibratoire moléculaire, l'éther que possède le corps participe au mouvement; ce mouvement se communique à l'éther ambiant, dans lequel il se propage par ondes successives, et l'éther ne conserve rien du mouvement vibratoire qu'il a servi à transmettre; c'est là ce qui constitue le *rayonnement* de la chaleur.

Inversement, quand une onde calorifique rencontre un corps, elle communique une partie de son énergie à l'éther que renferme le corps et aux molécules elles-mêmes; le corps entre alors en vibration, ou bien le mouvement vibratoire qu'il possédait est augmenté; le corps a absorbé une certaine quantité de chaleur.

Enfin, quand une molécule d'un corps est en vibration, elle communique cette vibration aux molécules voisines, et le mouvement se propage ainsi de proche en proche : il y a alors communication de chaleur par *conductibilité*. Il est probable que l'éther intervient encore dans ce dernier cas.

Nous appellerons *quantité de chaleur* la quantité de force vive qui se rapporte aux mouvements vibratoires, et, plus généralement, à tous les mouvements qui produisent les phénomènes calorifiques; de sorte que l'unité de chaleur sera l'unité mécanique de force vive ou de travail, c'est-à-dire le kilogrammètre.

32. Supposons donc qu'une certaine quantité de chaleur Q, venant du dehors, pénètre dans le corps; elle augmentera d'autant l'énergie du corps, et l'équation (21) deviendra

$$\Delta U = \sum \mathfrak{T} F \text{ ext.} + Q. \tag{23}$$

Si au contraire le corps dégage une quantité de chaleur Q', son énergie sera diminuée d'autant, et l'équation (21) deviendra

$$\Delta U = \sum \mathfrak{T} F \text{ ext.} - Q'.$$

On a ainsi le théorème général suivant :

Théorème X. — *Dans tout système, la variation de l'énergie est égale à la somme des travaux des forces extérieures, plus ou moins la quantité de chaleur absorbée ou dégagée.*

Mais on peut comprendre les deux cas dans la même équation (23); il suffit de regarder une quantité de chaleur absorbée comme positive, dégagée comme négative.

On peut répéter les mêmes raisonnements en considérant, non plus le mouvement absolu, mais le mouvement relatif à des axes de directions constantes passant par le centre de gravité. Si une quantité de chaleur Q est absorbée ou dégagée par le corps, elle augmentera ou diminuera d'autant son énergie intérieure, et l'équation (22) deviendra

$$(24) \qquad \Delta U_i = \sum \mathcal{C}' F \text{ ext.} + Q.$$

Théorème XI. — *Dans tout système, la variation de l'énergie intérieure est égale à la somme des travaux des forces extérieures, estimés dans le mouvement relatif à des axes de directions constantes passant par le centre de gravité, plus ou moins la quantité de chaleur absorbée ou dégagée.*

Travail des pressions extérieures.

33. Ordinairement les forces extérieures consistent en pressions normales s'exerçant sur la surface du corps. Le corps A reçoit d'un autre corps une pression P et réagit sur lui avec une force égale et contraire — P; il est clair que la somme des travaux des pressions extérieures que supporte le corps A est égale et de signe contraire à la somme des travaux des réactions exercées par le corps A sur les corps extérieurs. Si donc on appelle S la somme des travaux des réactions exercées par le corps A sur les corps extérieurs, la somme des travaux des pressions extérieures s'exerçant sur le corps A sera — S; l'équation (23) devient

$$(25) \qquad \Delta U = Q - S,$$

et le théorème X s'énonce de la manière suivante :

La variation de l'énergie d'un corps est égale à la quantité de chaleur absorbée ou dégagée par ce corps, moins le travail extérieur accompli ou reçu par le corps.

Le même théorème a lieu dans le mouvement relatif à des axes de directions constantes passant par le centre de gravité. Si l'on désigne par S' le travail extérieur accompli par le corps A, travail évalué dans ce mouvement relatif, l'équation (24) devient

$$(26) \qquad \Delta U_i = Q - S',$$

et le théorème XI s'énonce ainsi :

La variation de l'énergie intérieure d'un corps est égale à la quantité de chaleur absorbée ou dégagée par le corps, moins le travail extérieur accompli ou reçu par le corps dans le mouvement relatif à des axes de directions constantes passant par le centre de gravité.

34. Si le corps, après une série de transformations, revient à sa position et à son état primitifs, c'est-à-dire si chaque point matériel revient à sa position primitive et reprend la même vitesse, il est clair que la force vive V et l'énergie potentielle W du corps reprennent les mêmes valeurs, ainsi que l'énergie totale $U = V + W$. On a donc, dans ce cas, $\Delta U = 0$, et l'équation (25) se réduit à

$$(27) \qquad Q = S.$$

Il y a deux cas à distinguer, suivant que les quantités Q et S sont positives ou négatives. Dans le premier cas, le corps absorbe de la chaleur et accomplit un travail extérieur égal; dans le second cas, le corps reçoit au contraire un travail extérieur et dégage une quantité égale de chaleur. Ces deux cas sont compris dans un même énoncé :

Lorsque le corps revient au même état, la quantité de chaleur absorbée ou dégagée par le corps est égale au travail extérieur accompli ou reçu par le corps.

Les machines thermiques ont pour but de transformer la

chaleur en travail, ou, inversement, le travail en chaleur ou en lumière. Dans toutes ces machines, le mouvement est périodique et l'équation précédente est vraie pour un intervalle de temps égal à un nombre entier de périodes.

Travail extérieur dans le cas d'une pression uniforme.

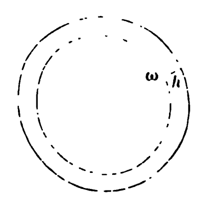
35. Les pressions extérieures se réduisent le plus souvent à une pression uniforme s'exerçant sur toute la surface du corps. Dans ce cas, le travail extérieur peut être exprimé d'une manière très simple.

Soient v le volume d'un corps, p la pression qu'il supporte par mètre carré, un élément ω de la surface supportera la pression $p\omega$. Supposons que le corps éprouve un changement de volume infiniment petit, et soit h la portion de normale comprise entre l'élément ω et la nouvelle surface du corps, portion de normale affectée du signe + ou du signe —, suivant qu'elle est portée en dehors ou en dedans du volume primitif. Le travail de la réaction exercée par le corps sur le milieu extérieur est $p\omega h$ pour l'élément de surface ω; le travail total dS accompli par le corps est

$$dS = \sum p\omega h = p\sum \omega h.$$

Mais ωh (*fig.* 2) est, avec le signe convenable, l'accroissement

Fig. 2.



de volume relatif à l'élément de surface ω, et par conséquent $\sum \omega h$ est la variation de volume dv du corps. On a donc

$$dS = p\,dv. \tag{28}$$

Il est à remarquer que, si le volume reste constant pendant que le corps se déplace ou se déforme, la somme algébrique des travaux des réactions exercées par les éléments de la surface du corps sur le milieu extérieur est nulle. D'après cela, dans le cas dont nous nous occupons, c'est-à-dire dans le cas d'une pression uniforme, le travail est indépendant des axes de coordonnées auxquels on rapporte le mouvement, que ces axes soient fixes ou mobiles d'une manière quelconque; car, si l'on suppose que le corps, d'abord solidifié et lié aux axes mobiles, soit transporté avec eux dans leur nouvelle position, puis se dilate ou se contracte, le travail qui se rapporte au premier déplacement étant nul, le travail correspondant au déplacement total sera égal au travail correspondant au déplacement relatif.

PREMIÈRE PARTIE.

THERMODYNAMIQUE.

CHAPITRE I.

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DES CORPS.

Température. — Lignes isothermes. — Passage de l'état liquide à l'état de vapeur. — Loi d'Andrews. — Vapeur sursaturante. — Liquide surchauffé. — Passage de l'état liquide à l'état solide. — Surfusion. — Lignes adiabatiques.

Température.

36. Lorsque deux corps sont mis en relation, l'un d'eux se comporte généralement comme une source de chaleur; il se refroidit pendant que le second s'échauffe. Cet échange de chaleur entre les corps peut avoir lieu de différentes manières. Si les corps sont en contact direct, ou s'ils sont séparés par des corps pondérables qui participent au mouvement calorifique, la communication de chaleur se fait par *conductibilité*. Si, au contraire, il n'y a pas de corps intermédiaires, ou si les corps pondérables intermédiaires ne participent pas au mouvement calorifique, la communication de chaleur se fait par *rayonnement*. Enfin, l'échange de chaleur peut avoir lieu en même temps par rayonnement et par conductibilité.

Dans tous les cas, si aucune cause extérieure n'intervient, les deux corps arrivent à un état qui persiste indéfiniment; on dit qu'ils sont alors en *équilibre de température* ou qu'ils ont la *même température*. C'est un état d'équilibre mobile, parce qu'on suppose qu'il y a entre eux des échanges de chaleur continuels et équivalents.

Quand l'équilibre a lieu entre deux corps, il est indépendant

de la disposition qu'on leur donne; on en conclut que l'équilibre de température est un état parfaitement défini, qui ne peut avoir lieu que d'une seule manière.

Si deux corps A et B sont en équilibre de température avec un troisième corps C, l'expérience indique qu'ils sont entre eux en équilibre de température.

Quand deux corps mis en relation ne sont pas en équilibre de température, celui qui envoie le plus de chaleur à l'autre est dit *à une température plus élevée*. Si un corps A est à une température plus élevée qu'un deuxième corps B, et si celui-ci est en équilibre avec un troisième corps C, l'expérience indique que le corps A est aussi à une température plus élevée que le corps C. Supposons de même que le corps B soit à une température plus élevée que C et moins élevée que A, et qu'on laisse refroidir le corps A jusqu'à ce qu'il soit en équilibre avec C, on constate qu'il passe par la température du corps intermédiaire B.

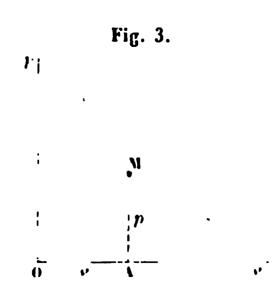
En d'autres termes, on peut, en classant les corps d'après leurs réactions calorifiques, construire une échelle des températures, et cette échelle des températures est unique.

Supposons qu'on mette un même corps P successivement en équilibre de température avec tous les corps de l'échelle précédente, il passera par une série d'états successifs qui pourront servir à caractériser les différentes températures : ce sera un *thermomètre*.

37. L'objet principal de la Thermodynamique est d'étudier les transformations d'un corps homogène, ayant dans toute son étendue la même densité ou le même volume spécifique v (le volume spécifique est le volume de l'unité de poids), la même température t, et soumis sur toute sa surface à une pression uniforme p. Il existe entre ces trois quantités t, v, p une relation; car l'expérience apprend que, quand l'une quelconque d'entre elles reste constante, et qu'une autre varie, la troisième varie également. Par exemple, quand, la pression restant constante, la température varie, le volume varie. On peut caractériser l'état du corps à l'aide de deux quelconques de ces trois quantités. Nous adopterons de préférence, pour le moment, le volume spécifique v et la pression p.

Une représentation géométrique aidera beaucoup à suivre les raisonnements. Ayant tracé dans un plan deux axes rectangulaires Ov et Op (*fig.* 3), on marquera le point M du plan, dont l'abscisse OA est égale à v, et l'ordonnée MA à p; la position du point M représentera l'état du corps; si le corps

Fig. 3.

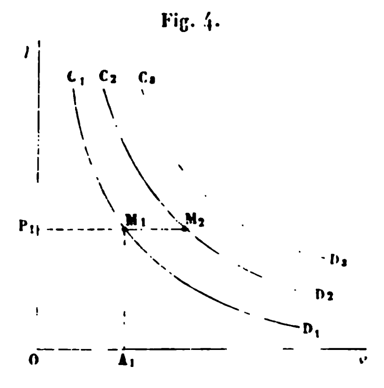


éprouve des transformations successives, la suite de ces transformations sera figurée par la ligne décrite par le point M dans le plan.

Lignes isothermes.

38. Une première série d'expériences nous donnera les lignes d'égale température ou *lignes isothermes*. Soit M_1 (*fig.* 4)

Fig. 4.



l'état d'un corps à la température t_1; si l'on fait varier la pression, la température restant constante, le volume variera et la suite des transformations sera figurée par la ligne isotherme C_1D_1, qui correspond à la température t_1.

Le corps étant ramené à l'état M_1, supposons que, la pression restant constante, on élève la température de t_1 à t_2, le corps se dilatera en général, décrivant une droite $M_1 M_2$, parallèle à l'axe Ov; le corps étant ainsi amené à l'état M_2, si, la température t_2 restant constante, on fait varier la pression, la suite des transformations sera figurée par une autre ligne isotherme $C_2 D_2$, et ainsi de suite.

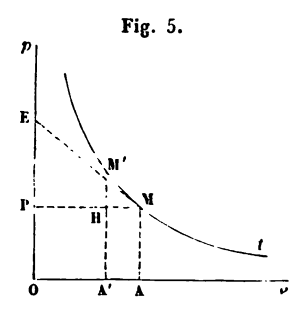
L'ensemble des lignes isothermes peut être représenté par l'équation

$$f(v, p) = t. \tag{1}$$

Elle permet, deux des quantités t, v, p étant données, d'en déduire la troisième.

39. Quand un corps va de l'état M à un état voisin M′ sur la ligne isotherme t (*fig.* 5), à une diminution MH du volume

Fig. 5.



correspond une augmentation M′H de la pression; la limite du rapport de l'accroissement de la pression à la diminution relative du volume est ce qu'on appelle l'*élasticité à température constante*.

On a ainsi

$$E_t = \left(\frac{dp}{-\frac{dv}{v}} \right)_t = -v\left(\frac{dp}{dv}\right)_t; \tag{2}$$

nous indiquons par l'indice t que la température reste constante. Si l'on mène la tangente par le point M à la ligne isotherme, l'élasticité à température constante est représentée

par la longueur de la portion PE de l'axe Op, comprise entre le point P, projection du point M, et le point E, où la tangente coupe l'axe.

40. *Gaz.* — On ne connaît pas l'équation des lignes isothermes pour les corps de nature quelconque. On ne la connaît, et seulement d'une manière approchée, que pour les gaz qui suivent à peu près la loi de Mariotte; cette loi expérimentale consiste en ce que, à la même température, le produit vp du volume par la pression est constant; les lignes isothermes pour les gaz sont donc des hyperboles équilatères. Dans ce cas, l'élasticité à température constante est égale à la pression elle-même p.

Jusqu'ici, nous n'avons adopté aucun mode particulier de graduation pour l'échelle des températures. A cause de la propriété générale des gaz dont nous venons de parler, on emploie de préférence le thermomètre à gaz, et l'on gradue l'échelle par les variations du volume d'une même masse de gaz, sous la même pression. Soient v_0 et v_1 les volumes d'une masse de gaz à deux températures déterminées t_0 et t_1 sous la pression p_0, v le volume à une température quelconque t sous la même pression; en écrivant que les variations de la température sont proportionnelles à celles du volume, on a

$$\frac{t - t_0}{t_1 - t_0} = \frac{v - v_0}{v_1 - v_0}.$$

Les deux températures fixes t_0 et t_1 se rapportent à des phénomènes physiques bien déterminés; on a choisi la température de la fusion de la glace et celle de l'ébullition de l'eau sous la pression de 760^{mm} de mercure, et l'on fait $t_0 = 0$, $t_1 = 100$. Si l'on pose

$$\alpha = \frac{v_1 - v_0}{v_0 (t_1 - t_0)},$$

la relation précédente devient

$$v = v_0 (1 + \alpha t).$$

Le nombre α est ce qu'on appelle le *coefficient de dilatation* du gaz. L'expérience apprend qu'il est à peu près le même

pour tous les gaz, et qu'il est indépendant de la pression p_0; sa valeur est $\frac{1}{273}$.

On en déduit l'équation des lignes isothermes. Soient v_0 le volume d'un poids de gaz égal à 1^{kg}, à la température zéro, sous la pression p_0 égale au poids de 760^{mm} de mercure, v le volume de la même masse de gaz à la température t, sous la pression p. Appelons v' le volume qu'occuperait cette masse de gaz à la température t, sous la pression p_0. On a, d'une part, d'après la relation précédente,

$$v' = v_0(1 + \alpha t),$$

d'autre part, d'après la loi de Mariotte,

$$vp = v'p_0;$$

on en déduit

$$vp = v_0 p_0 (1 + \alpha t). \tag{3}$$

Telle est l'équation des lignes isothermes pour les gaz, ou la relation qui existe entre la température, le volume et la pression.

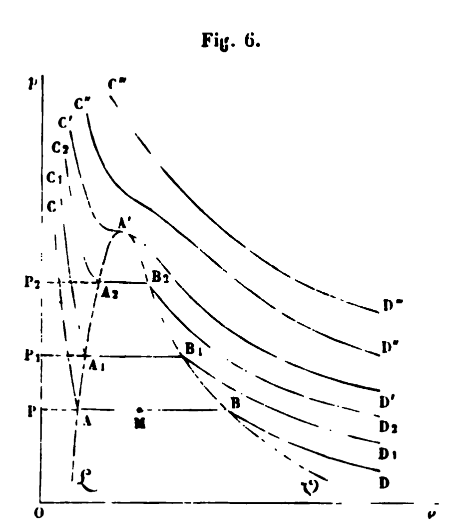
Passage de l'état liquide à l'état de vapeur, et réciproquement.

41. On a observé que, lorsque, dans un vase clos, maintenu à une température constante t, se trouvent en contact deux parties d'une même substance, l'une à l'état liquide, l'autre à l'état de vapeur, et que la surface de contact est plane, la densité et la pression de la vapeur tendent vers des limites déterminées, indépendantes de la quantité de liquide. Dans cet état, la vapeur est dite *vapeur saturante* en présence d'une surface liquide plane, ou simplement *vapeur saturante normale*. La densité et la pression de la vapeur saturante normale sont des fonctions de la température. Soit $p = F(t)$ cette pression; on dit aussi que p est la pression normale de vaporisation ou de liquéfaction à la température t, et, réciproquement, que t est la température normale de vaporisation ou de liquéfaction sous la pression p.

Les liquides éprouvent en général une diminution très faible de volume quand la pression augmente; il en résulte que leur élasticité est très grande et que leurs lignes isothermes dif-

fèrent peu de droites parallèles à l'axe Op. Soit CA la partie de la ligne isotherme relative à l'état liquide d'une substance (*fig.* 6); la pression diminue très rapidement, quand le vo-

Fig. 6.



lume augmente; en A, la pression est devenue égale à la pression normale de vaporisation à la température t; à ce moment, si un espace libre en contact avec le liquide par une surface plane se présente, la vaporisation commence, et elle se continue à mesure que le volume augmente, jusqu'à ce que tout le liquide soit transformé en vapeur; pendant toute la durée de la transformation, la vapeur, étant en contact avec une surface liquide plane, est à l'état de vapeur saturante normale; sa pression reste constante et, par conséquent, la portion de la ligne isotherme qui se rapporte à cette transformation du liquide en vapeur est une droite AB parallèle à l'axe Ov. En B tout le liquide est converti en vapeur; à partir de là, le volume de la vapeur augmentant, la pression diminue indéfiniment et l'arc BD, qui se rapporte à l'état de vapeur pure, se rapproche d'une branche d'hyperbole. On a ainsi la ligne isotherme CABD, relative à la température t.

Inversement, si la vapeur part de l'état D et que le volume diminue, la pression augmente et devient en B égale à la pres-

sion normale de liquéfaction; si, à ce moment, il se forme une petite quantité de liquide présentant une surface plane, la vapeur se liquéfie peu à peu à mesure que le volume diminue, et, pendant tout le temps que dure la liquéfaction, la pression reste constante; en A, toute la vapeur est revenue à l'état liquide.

Désignons par u le volume spécifique PA du liquide sous la pression normale de vaporisation, par u' le volume spécifique PB de la vapeur saturante normale, par v le volume PM d'un mélange formé d'un poids x de vapeur et d'un poids $1-x$ de liquide; on a

$$v = u'x + u(1-x) = u + (u'-u)x,$$

d'où

$$x = \frac{v-u}{u'-u}, \quad 1-x = \frac{u'-v}{u'-u}, \quad \frac{x}{1-x} = \frac{\text{MA}}{\text{MB}}.$$

Ainsi l'état M du mélange coïncide avec le centre de gravité du poids $1-x$ de liquide placé en A et du poids x de vapeur placé en B.

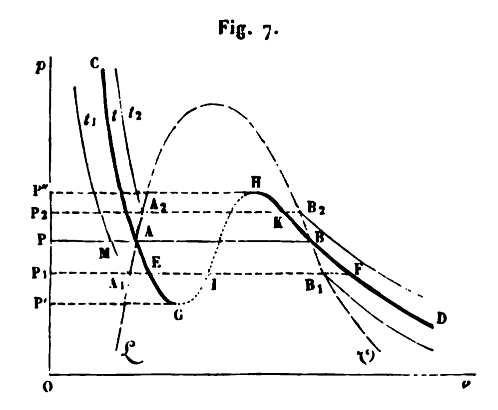
42. *Loi d'Andrews.* — Considérons la série des lignes isothermes CABD, $C_1A_1B_1D_1$, $C_2A_2B_2D_2$, ..., qui correspondent à des températures t, t_1, t_2, ..., de plus en plus élevées. Le lieu des points A, A_1, A_2, ..., qui se rapportent à l'état liquide sous la pression normale de vaporisation, forme une ligne $\mathfrak{L}$ qui s'élève en s'écartant un peu de l'axe Op. Le lieu des points B, B_1, B_2, ..., qui se rapportent à l'état de vapeur saturante normale, forme une ligne $\mathfrak{V}$ qui s'élève en se rapprochant assez rapidement de l'axe Op. Les parties rectilignes AB, A_1B_1, A_2B_2, ..., relatives à la transformation du liquide en vapeur, ou inversement, sont de plus en plus petites. Il est probable, d'après cela, que les deux lignes $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{V}$, qui se rapprochent de plus en plus, se raccordent en un point A', où elles sont tangentes à une ligne isotherme C'A'D', correspondant à la température t'; les lignes isothermes C''D'', C'''D''', ..., relatives à des températures t'', t''', ..., de plus en plus élevées, n'ont plus de parties rectilignes et tendent vers la forme hyperbolique qui convient aux gaz. Il en résulte que la liquéfaction de la vapeur ne s'opère qu'à des températures inférieures à une température

limite t'; lorsque la température est supérieure à t', la liquéfaction n'est plus possible et la forme gazeuse se conserve indéfiniment, quelle que soit la grandeur de la pression ou la diminution du volume.

C'est la loi que M. Andrews a reconnue sur l'acide carbonique et qu'on a étendue par analogie à tous les gaz. Pour l'acide carbonique, la température limite au-dessous de laquelle s'opère la liquéfaction est 31°, et la pression correspondante 73^{atm}. Pour l'éther, elle est de 187° sous la pression de $37^{atm},5$; pour l'alcool, de 258° sous la pression de 119^{atm}. Pour l'eau, d'après les expériences de Cagniard-Latour, elle serait de 412°. Pour l'oxygène, l'azote, l'hydrogène, cette température limite est au contraire très basse; elle est probablement inférieure à — 100°; c'est en produisant un grand abaissement de la température, par une expansion rapide, que M. Cailletet est parvenu à liquéfier ces gaz.

43. *Hypothèse de James Thomson.* — Si l'on considère la ligne isotherme CABD (*fig.* 7), qui correspond à la température t, on remarque qu'aux points A et B l'inclinaison de la tangente et par conséquent l'élasticité éprouvent un changement brusque. Cette discontinuité provient sans doute de ce que la partie rectiligne AB se rapporte, non pas à un état homogène comme les parties CA et BD, relatives à l'état liquide et à l'état de vapeur, mais à un mélange de liquide et de vapeur.

Fig. 7.



M. James Thomson a pensé que, si le corps restait homogène, la courbe ne présenterait plus de discontinuité et aurait une forme sinueuse, telle que CAGHBD, la partie CAG se rapportant à l'état liquide, la partie HBD à l'état de vapeur et la partie intermédiaire GIH à un état instable qui ne peut être observé.

Menons à cette courbe les tangentes horizontales GP′, HP″; à la température t, sous une pression OP_1, intermédiaire entre OP′ et OP″, le corps, supposé homogène, présente trois états d'équilibre, savoir : l'état liquide E, l'état de vapeur F et l'état instable I. Il est aisé de voir que les deux premiers états sont stables, mais que le dernier est instable. Nous supposons que le corps soit en libre communication de chaleur avec le milieu ambiant qui est à la température t et à la pression p_1; si l'on dérange le corps de la position d'équilibre F, et qu'on l'amène en un point voisin sur la ligne isotherme HBD, en diminuant son volume, la pression intérieure devenant plus grande que la pression extérieure p_1, le corps, abandonné à lui-même, se dilatera et reviendra en F; de même, si l'on augmente le volume, la pression intérieure devenant moindre que la pression extérieure p_1, celle-ci l'emportera et comprimera le corps pour le ramener en F; ainsi l'état de vapeur F est un état d'équilibre stable. Il en est de même de l'état liquide E. Mais l'état I est instable; car, si le volume augmentait un peu sur la ligne isotherme IH, la pression intérieure devenant plus grande que la pression extérieure p_1, le corps, abandonné à lui-même, se dilaterait encore plus et s'éloignerait de la position I; de même, si le volume diminuait un peu, la pression intérieure devenant moindre que la pression extérieure, le volume continuerait à diminuer et s'éloignerait encore de la position d'équilibre.

44. *Vapeur sous une pression plus grande que la pression normale de liquéfaction.* — Cette forme sinueuse BCHB, attribuée à la ligne isotherme par M. James Thomson pour remplacer la partie rectiligne AB, permet de rattacher à la loi générale des transformations deux catégories de phénomènes que l'on regardait auparavant comme des exceptions. Considérons l'arc BH. A la température t, OP est la pression maximum de la vapeur en contact avec une surface liquide plane. Quand

aucune partie liquide n'est mêlée à la vapeur, celle-ci peut être amenée à la température t, sur l'arc BH, à des pressions de plus en plus grandes, sans liquéfaction partielle. Par exemple, en K, la vapeur supporte une pression OP_2 supérieure à la pression normale de liquéfaction OP relative à la même température t; elle a une densité plus grande que celle de la vapeur saturante normale à la température t. En envisageant le phénomène à un autre point de vue, on peut dire aussi qu'en K la vapeur est à une température t inférieure à la température normale de liquéfaction t_2 sous la même pression OP_2.

Quand la vapeur a été amenée à l'état K sur l'arc BH, si, dans le vase dont le volume est P_2K, il se forme, par une cause quelconque, une gouttelette liquide d'une dimension convenable, ou simplement une mince couche liquide en contact avec la vapeur par une surface sensiblement plane, l'équilibre est immédiatement rompu; il s'établit un nouvel état d'équilibre, caractérisé par le même point K, indiquant un mélange de liquide et de vapeur sur la droite A_2B_2, à une température t_2 supérieure à t, sous la pression OP_2; une partie de la vapeur proportionnelle à la longueur B_2K s'est liquéfiée.

45. *Liquide sous une pression plus petite que la pression normale de vaporisation.* — Considérons maintenant l'arc AG. A la température t, OP est la pression minimum du liquide en contact avec la vapeur par une surface plane. Quand le liquide n'est en contact avec aucune bulle de vapeur, on peut l'amener à la température t, sur l'arc AG, à des pressions de plus en plus faibles, sans vaporisation partielle. Par exemple, en E, le liquide est soumis à une pression OP_1 inférieure à la pression normale de vaporisation OP relative à la même température t. On peut dire aussi qu'en E le liquide est à une température t supérieure à la température normale de vaporisation t_1 sous la même pression OP_1.

Quand le liquide a été amené à l'état E sur l'arc AG, si, dans le vase dont le volume est P_1E, il se forme, par une cause quelconque, une bulle de vapeur d'une dimension convenable, ou simplement une mince couche de vapeur en contact avec le liquide par une surface sensiblement plane, l'équilibre est

immédiatement rompu; il s'établit un nouvel état d'équilibre caractérisé par le point E, indiquant un mélange de liquide et de vapeur sur la droite A_1B_1, à une température t_1 inférieure à t, sous la même pression OP_1; une partie du liquide proportionnelle à la longueur A_1E s'est vaporisée.

Passage de l'état liquide à l'état solide, ou inversement.

46. Les considérations précédentes s'appliquent à ce changement d'état. Lorsque, dans un vase maintenu à une température constante t, se trouvent en contact par une surface plane deux parties d'une même substance, l'une à l'état liquide, l'autre à l'état solide, la pression a une valeur déterminée, indépendante de la quantité de liquide; cette pression est une fonction $p = F(t)$ de la température. On dit que c'est la pression normale de fusion ou de solidification à la température t, et, réciproquement, que t est la température normale de fusion ou de solidification sous la pression p.

En général, le volume du liquide est plus grand que celui du solide; la *fig.* 7 pourra servir à représenter la transformation CA se rapportant à l'état solide, BD à l'état liquide, et la partie rectiligne AB au passage du premier état au second.

Lorsque le liquide est privé de toute particule solide, il peut être amené à la température t, sur l'arc BH, à des pressions plus grandes que la pression normale de solidification OP relative à la température t, sans qu'il se produise de solidification partielle. On peut dire aussi qu'en K, par exemple, le liquide est à une température t inférieure à la température normale t_2 de solidification, sous la même pression OP_2. Si l'on introduit dans le vase une particule solide, une partie du liquide se solidifie brusquement.

De même, le solide peut être amené sur l'arc AG, en E, par exemple, à une température t supérieure à la température normale t_1 de fusion, sous la même pression OP_1.

L'eau présente une particularité remarquable; le volume de la glace étant plus grand que celui de l'eau, la figure est intervertie; la partie CA se rapporte à l'état liquide, et la partie BD à l'état solide. Ici la température t_1 est supérieure à t et t supérieure à t_2; car, si l'on suppose, par exemple, que l'eau soit

à l'état A à la température $t = 0$, et qu'on élève la température de zéro à 2° sous la même pression OP, le volume diminuant, l'eau viendra en M sur la ligne isotherme $t_1 = 2$.

Le phénomène de surfusion subsiste : l'eau, privée de toute particule solide, peut être amenée sur l'arc AG à une température t inférieure à la température normale t_1 de congélation sous la pression OP. On remarque aussi que la température normale de congélation de l'eau, ou de fusion de la glace, s'abaisse quand la pression augmente ; par exemple, la température de fusion t_2 sous la pression OP_2 est inférieure à la température de fusion t sous la pression OP.

Lignes adiabatiques.

47. Le corps partant d'un état caractérisé par un point M pris arbitrairement sur une ligne isotherme t (*fig.* 8) et étant placé dans une enveloppe imperméable à la chaleur, si l'on fait

Fig. 8.

varier la pression, on reconnaît que le volume varie suivant une certaine loi ; il existe donc, pour un état initial donné M, une relation entre le volume et la pression

$$F(v, p) = \mu, \tag{4}$$

la constante μ dépendant de l'état initial M.

On a donné à la ligne figurant la suite des transformations le nom de *ligne adiabatique* ou de *nulle transmission*. Une

série d'expériences pour chaque corps déterminera l'ensemble des lignes adiabatiques.

Quand on comprime le corps de M en M′ suivant la ligne adiabatique μ, c'est-à-dire sans gain ni perte de chaleur, la température augmente de t à t'; la ligne isotherme t', qui passe par le point M′, est en général placée au-dessus de la ligne isotherme t, et la ligne adiabatique μ coupe la ligne isotherme t comme l'indique la figure, la partie gauche de la ligne μ passant au-dessus de la ligne t.

48. Le corps allant de M à M′, le volume diminue et la pression augmente; la limite du rapport de l'accroissement de la pression à la diminution relative du volume est ce qu'on appelle l'*élasticité suivant une ligne adiabatique*. Si on la désigne par E_μ, on a

$$E_\mu = - v \left(\frac{dp}{dv}\right)_\mu, \tag{5}$$

l'indice μ indiquant une variation sur la ligne adiabatique μ. Si l'on mène la tangente ME′ à la ligne adiabatique, cette élasticité est représentée par la longueur de la portion PE′ de l'axe Op, comprise entre le point P, projection du point M sur l'axe, et le point E′, où la tangente rencontre l'axe. Cette seconde élasticité PE′ est plus grande que l'élasticité PE à température constante (nº 39).

CHAPITRE II.

THÉORÈME DE CARNOT.

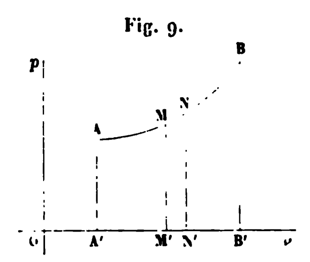
Transformations réversibles. — Cycle. — Fonction intégrante. — Cycle de Carnot. — Théorème de Carnot. — Température absolue. — Entropie. — Zéro absolu de la température. — Remarques sur l'entropie. — Analogies mécaniques.

Transformations réversibles.

49. Nous avons représenté l'état d'un corps homogène, soumis à une pression uniforme sur toute sa surface, par la position dans un plan d'un point M ayant pour coordonnées le volume spécifique v et la pression p par rapport à deux axes rectangulaires Ov et Op tracés dans le plan.

Quand le corps va de l'état A à l'état B (*fig.* 9), la suite des transformations est figurée par une ligne AMB. Ce mode de

Fig. 9.



représentation offre cet avantage que le travail S des réactions exercées par le corps sur le milieu extérieur est représenté par l'aire plane ABB'A', comprise entre la courbe AMB, l'axe Ov et les deux ordonnées extrêmes AA' et BB'. Nous avons vu, en effet (n° 35), que le travail correspondant à une transformation infiniment petite MN est exprimé par la formule $dS = p\,dv$;

il est égal à l'aire du petit rectangle MNN'M'. Pour la transformation AMB, le travail est par conséquent égal à l'aire ABB'A'. Il est positif ou négatif, suivant que l'ordonnée finale BB' est située à droite ou à gauche de l'ordonnée initiale AA'; dans le premier cas, le corps accomplit un travail extérieur; dans le second cas, il reçoit au contraire des forces extérieures une certaine quantité de travail.

Pendant la transformation infiniment petite MN, le corps absorbe ou dégage une quantité de chaleur dQ; il accomplit ou reçoit un travail extérieur $dS = p\,dv$; son énergie intérieure éprouve une variation dU et l'on a entre ces trois quantités, d'après le théorème des forces vives (n° 33), la relation

$$dQ = dU + p\,dv. \tag{1}$$

Pendant la transformation inverse NM, il est clair que les deux quantités dU et dS changent de signe, et par conséquent que la quantité dQ change elle-même de signe.

50. Imaginons que le corps dont nous suivons les transformations soit en communication calorifique avec un corps extérieur indéfini K, parfaitement conducteur, dont la température soit égale à chaque instant à celle du premier corps, de manière que la chaleur puisse passer librement de l'un à l'autre. Ce corps extérieur K fournira au corps proposé la quantité de chaleur nécessaire pour chaque transformation élémentaire MN, ou recevra la chaleur dégagée par lui pendant cette transformation. Supposons en outre que la pression extérieure soit égale à chaque instant à la pression intérieure p, qui correspond au volume v et à la température t.

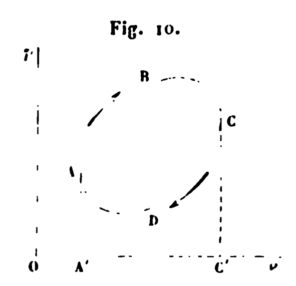
Dans ces conditions, la transformation AMB sera *réversible*, c'est-à-dire que la transformation inverse BMA pourra s'accomplir. Si le corps extérieur K était à une température supérieure à t, il pourrait bien fournir la chaleur nécessaire à une transformation MN, mais il ne pourrait pas recevoir la chaleur dégagée dans la transformation inverse. De même, si la pression extérieure était moindre que p, le corps pourrait bien se dilater, mais la transformation inverse serait impossible. Dans tout ce qui suit, nous supposerons les transformations réversibles.

Cycle.

51. On appelle *cycle* une suite de transformations qui ramènent le corps à son état primitif. Un cycle est figuré par une courbe fermée. La somme algébrique des travaux accomplis ou reçus par le corps dans la suite des transformations est égale en valeur absolue à l'aire enveloppée par la courbe fermée.

Si, par exemple, le cycle ABCDA (*fig.* 10) est décrit dans le sens de la flèche, le corps effectue un travail extérieur

Fig. 10.

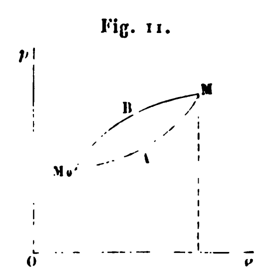


ABCC'A' pendant la phase ABC de la transformation; il reçoit au contraire un travail CDAA'C' pendant la phase CDA; le premier est positif, le second est négatif; la différence, qui est positive, est égale à l'aire enveloppée par la courbe fermée ABCDA. Si le cycle était décrit en sens contraire, le corps effectuerait un travail ADCC'A' pendant la phase ADC, et recevrait un travail plus grand CBAA'C' pendant la phase CBA; la différence, qui est négative, est encore égale, en valeur absolue, à l'aire enveloppée par la courbe. Dans les deux cas, la quantité de chaleur Q absorbée ou dégagée par le corps pendant le cycle entier est égale au travail S accompli ou reçu par le corps (n° 34).

52. Concevons que le corps parte d'un même état initial M_0 et arrive au point M par différents chemins M_0AM, M_0BM (*fig.* 11). Son énergie U au point M est indépendante du chemin suivi pour y arriver; c'est une fonction des deux variables v et p qui définissent la position de ce point. Le travail S, qui est représenté par l'aire limitée par la courbe et les deux or-

données extrêmes, variant avec la forme de la courbe, n'est pas simplement une fonction de la position du point M ou

Fig. 11.



de ses deux coordonnées v et p. Comme on a

$$Q = (U - U_0) + S,$$

la quantité de chaleur Q, absorbée ou dégagée pendant la transformation, varie aussi avec la forme de la courbe; elle n'est pas non plus une fonction des deux variables v et p.

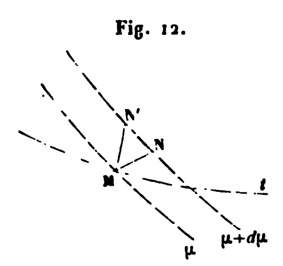
Fonction intégrante.

53. Deux séries d'expériences pour chaque substance nous ont donné, d'une part la suite des lignes isothermes $f(v, p) = t$, d'autre part celle des lignes adiabatiques $F(v, p) = \mu$. Il sera avantageux, comme nous le verrons, de définir la position du point M, qui représente l'état du corps à un moment quelconque, par l'intersection de la ligne isotherme t et de la ligne adiabatique μ qui passent en ce point (*fig.* 12). Toutes les quantités qui dépendent uniquement de l'état actuel du corps, comme le volume v, la pression p, l'énergie U, pourront être regardées comme des fonctions des deux variables t et μ.

Soient q et q' les quantités de chaleur relatives à des transformations infiniment petites MN, MN', allant du point M à deux points N et N' situés sur une même ligne adiabatique $\mu + d\mu$, voisine de la ligne adiabatique μ qui passe par le point M, et supposons que le corps décrive le cycle MN'NM; sur MN' le corps absorbe une quantité de chaleur q'; sur la ligne adiabatique N'N il n'y a ni absorption ni dégagement

de chaleur; sur NM le corps dégage une quantité de chaleur q, de sorte que, pour le cycle entier, la quantité de chaleur acquise par le corps est $q' - q$. Cette quantité de chaleur $q' - q$ est égale au travail extérieur accompli, qui est représenté par l'aire du triangle MN'N; cette aire étant

Fig. 12.



une quantité infiniment petite du second ordre, il en résulte que les deux quantités de chaleur q et q' ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite du second ordre, et par conséquent que les rapports $\frac{q}{d\mu}$, $\frac{q'}{d\mu}$ tendent vers la même limite, quand $d\mu$ tend vers zéro. On en conclut que, lorsqu'un corps part de l'état M et éprouve une transformation MN dans une direction quelconque, la limite du rapport de la quantité de chaleur absorbée ou dégagée dQ à la variation de μ est indépendante de la direction du déplacement MN; elle dépend uniquement de la position du point M; c'est donc une fonction des deux variables t et μ. Nous désignerons par λ cette fonction et nous poserons

$$\frac{dQ}{d\mu} = \lambda. \tag{2}$$

On arrive à la même conclusion en transformant analytiquement l'équation des forces vives. Les quantités U et v étant des fonctions des deux variables t et μ, on a, en effet, les différentielles totales

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t}\, dt + \frac{\partial U}{\partial \mu}\, d\mu,$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t}\, dt + \frac{\partial v}{\partial \mu}\, d\mu,$$

et l'équation (1) devient

$$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial t} + p\,\frac{\partial v}{\partial t}\right) dt + \left(\frac{\partial U}{\partial \mu} + p\,\frac{\partial v}{\partial \mu}\right) d\mu;$$

elle prend la forme

$$dQ = \lambda' \, dt + \lambda \, d\mu;$$

λ' et λ étant des fonctions de t et de μ. Mais quand $d\mu = 0$, c'est-à-dire quand la transformation s'opère sur la ligne adiabatique μ, la quantité de chaleur dQ est nulle; il en résulte que la fonction λ' est identiquement nulle et, par conséquent, que l'équation précédente se réduit à la forme

$$dQ = \lambda \, d\mu;$$

c'est l'équation (2).

Nous avons dit que Q n'est pas une fonction des deux variables v et p, choisies primitivement pour définir à chaque instant l'état du corps; la relation

$$\frac{dQ}{\lambda} = d\mu$$

nous apprend que la fonction λ jouit de la propriété de rendre l'expression $\frac{dQ}{\lambda}$ égale à la différentielle exacte d'une fonction μ de ces variables; nous l'appellerons, pour cette raison, *fonction intégrante.*

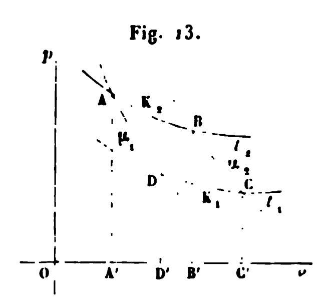
Cycle de Carnot.

54. Parmi les différents cycles, il en est un qui joue un rôle important dans la théorie; il est formé de deux lignes isothermes et de deux lignes adiabatiques : on l'appelle *cycle de Carnot.* Considérons deux lignes isothermes DC et AB (*fig.* 13), correspondant, la première à la température t_1, la seconde à une température plus élevée t_2, et deux lignes adiabatiques AD et BC correspondant aux valeurs μ_1 et μ_2. Si le corps part de l'état A et y revient après avoir éprouvé les transformations successives AB, BC, CD, DA, il aura suivi un cycle de Carnot. Pour que cette transformation soit possible, il faut concevoir deux corps étrangers, indéfinis et parfaitement conducteurs, l'un K_2 à la température t_2, l'autre K_1 à la température

t_1, avec lesquels le corps considéré sera mis alternativement en communication.

Supposons le cycle parcouru dans le sens ABCDA, que nous appellerons *sens direct*.

Fig. 13.



1° Pendant la transformation AB, le corps est à la température constante t_2; il reçoit du corps extérieur K_2 une certaine quantité de chaleur Q_2; cette quantité de chaleur produit une variation d'énergie intérieure et un travail extérieur positif figuré par l'aire du trapèze ABB'A'.

2° Pendant la transformation BC, suivant une ligne adiabatique, le corps n'a aucune communication calorifique avec l'extérieur; il ne reçoit ni ne perd de la chaleur : l'énergie intérieure diminue et se transforme en un travail extérieur positif BCC'B'.

3° Pendant la transformation CD à la température constante t_1, le travail extérieur est négatif; la pression extérieure fournit au corps une certaine quantité de travail CDD'C'; ce travail produit une variation d'énergie intérieure, et une certaine quantité de chaleur Q_1, qui se dégage et se porte sur le corps extérieur K_1 en contact avec le corps considéré, et à la même température que lui.

4° Enfin, le long de la ligne adiabatique DA, toute communication de chaleur est de nouveau supprimée: le travail extérieur reçu DAA'D' augmente l'énergie intérieure du corps et ramène le corps à l'état primitif A.

Le corps, dont nous avons considéré les transformations, est une véritable machine fonctionnant suivant le cycle de Carnot. Elle est alternativement en communication avec le corps exté-

rieur K_2, duquel elle reçoit une quantité de chaleur Q_2 à la température constante t_2, et avec le corps extérieur K_1, auquel elle cède une quantité de chaleur Q_1 à la température constante t_1.

Après chaque cycle, l'énergie intérieure U reprenant sa valeur primitive, l'équation des forces vives se réduit à

$$Q_2 - Q_1 = S.$$

Le travail extérieur S accompli par la machine est la différence entre le travail positif ABCC'A' et le travail négatif CDAA'C'; il est figuré par l'aire du cycle ABCD. La quantité de chaleur Q_2 fournie par le corps K_2 se divise en deux parties: l'une $Q_2 - Q_1$ se transforme en travail, l'autre Q_1 passe du corps K_2 au corps K_1, qui est à une température t_1 inférieure à t_2. On a ici deux phénomènes connexes : transformation d'une quantité de chaleur en travail, et passage d'une autre quantité de chaleur d'un corps à un autre, qui est à une température moins élevée que le premier.

55. Il est clair qu'une pareille machine est réversible. Supposons qu'elle fonctionne en *sens inverse*, en partant de l'état D. Suivant la ligne isotherme DC, la machine reçoit du corps extérieur K_1 une quantité de chaleur Q_1; elle éprouve une variation d'énergie intérieure et produit un travail extérieur figuré par l'aire DCC'D'. Suivant la ligne adiabatique CB, elle reçoit un travail extérieur CBB'C', qui produit un accroissement d'énergie intérieure. Suivant la ligne isotherme BA, la machine éprouve une variation d'énergie intérieure, reçoit un travail extérieur BAA'B' et cède au corps extérieur K_2 la quantité de chaleur Q_2. Enfin, suivant la ligne adiabatique AD, il y a diminution d'énergie intérieure qui produit le travail extérieur ADD'A'.

Dans ce jeu inverse, la machine prend à la source inférieure K_1 une quantité de chaleur Q_1 et verse sur la source supérieure K_2 une quantité de chaleur plus grande Q_2; il a création d'une quantité de chaleur $Q_2 - Q_1$. En même temps, la machine a reçu une quantité de travail extérieur CBAA'C' plus grande que celui ADCC'A' qu'elle a accompli; la différence S' est figurée par l'aire du cycle ABCD. Cette quantité S' de travail

reçue par la machine est transformée en une quantité égale de chaleur $Q_2 - Q_1$. On a encore ici deux phénomènes connexes : transformation du travail en chaleur et transport d'une certaine quantité de chaleur Q_1 du corps K_1 au corps K_2, qui est à une température plus élevée que le premier.

Lorsque deux corps K_1 et K_2, le premier à la température t_1, le second à une température t_2 supérieure à t_1, sont en communication calorifique, soit par conductibilité, soit par rayonnement, la chaleur passe d'elle-même du corps K_2 au corps K_1; c'est ce fait général qui a servi à établir l'échelle des températures. On admet, par analogie, que le même phénomène se produit lorsque les corps sont mis en relation par l'intermédiaire d'une machine thermique; en d'autres termes, on admet qu'il est impossible de faire passer de la chaleur du corps K_1 au corps K_2, qui est à une température plus élevée que le premier, sans une dépense de travail. C'est, du reste, ce que l'expérience a vérifié.

Théorème de Carnot.

56. Ce théorème consiste en ce que, *pour tous les corps fonctionnant suivant des cycles de Carnot entre les mêmes limites de température, le rapport de la quantité de chaleur transformée en travail à la quantité de chaleur puisée à la source supérieure est constant.*

Concevons différents corps fonctionnant dans le sens direct suivant des cycles de Carnot, formés de lignes adiabatiques quelconques et des lignes isothermes qui correspondent aux mêmes températures t_2 et t_1; ces lignes isothermes ne sont pas pour cela identiques, puisque leur forme dépend de la nature des corps. Si l'on appelle Q_2, Q'_2, Q''_2, ... les quantités de chaleur que ces différents corps empruntent à la source supérieure K_2, Q_1, Q'_1, Q''_1, ... les quantités de chaleur qu'ils cèdent à la source inférieure K_1, le théorème de Carnot signifie que les rapports

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{Q'_2 - Q'_1}{Q'_2} = \frac{Q''_2 - Q''_1}{Q''_2} = \dots$$

sont égaux pour tous les corps.

Nous pouvons nous borner à considérer deux corps; il s'agit de démontrer que l'on a

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{Q'_2 - Q'_1}{Q'_2} \quad \text{ou} \quad \frac{Q_2 - Q_1}{Q'_2 - Q'_1} = \frac{Q_2}{Q'_2}.$$

Nous allons faire voir que, si ces deux rapports n'étaient pas égaux, on serait conduit à une conséquence en contradiction avec la loi expérimentale énoncée précédemment.

Supposons le premier rapport commensurable et égal au rapport de deux nombres entiers m et n,

$$(3) \qquad \frac{Q_2 - Q_1}{Q'_2 - Q'_1} = \frac{m}{n},$$

et admettons que le deuxième rapport $\frac{Q_2}{Q'_2}$ diffère du premier, soit par exemple plus petit que lui, on aurait

$$\frac{Q_2}{Q'_2} < \frac{m}{n},$$

ou

$$(4) \qquad mQ'_2 - nQ_2 > 0.$$

Appelons A et B les deux corps considérés, fonctionnant, le premier suivant le cycle (A), le second suivant le cycle (B). Formons avec ces deux corps une machine complexe, dans laquelle le corps A parcoure n fois le cycle (A) dans le sens direct, pendant que le second B parcourt m fois le cycle (B) dans le sens inverse.

Évaluons d'abord le travail extérieur accompli par la machine complexe pendant cette période de fonctionnement. A chaque cycle, le corps A transforme la quantité $Q_2 - Q_1$ de chaleur en travail; pendant toute la période, il a donc effectué le travail

$$n(Q_2 - Q_1).$$

Le corps B produit à chaque cycle la quantité de chaleur $Q'_2 - Q'_1$; il reçoit donc pendant la même période une quantité de travail égale à

$$m(Q'_2 - Q'_1).$$

Il en résulte que le travail extérieur accompli par la machine complexe pendant une période est égale à la différence

$$n(Q_2 - Q_1) - m(Q'_2 - Q'_1);$$

cette différence est nulle d'après la relation (3). La machine complexe ne reçoit donc ni ne produit aucun travail extérieur.

Évaluons maintenant les échanges de chaleur. Le corps A, fonctionnant dans le sens direct, enlève à la source supérieure K_2, pendant la période considérée, la quantité de chaleur nQ_2, et porte sur la source inférieure K_1 la quantité de chaleur nQ_1. Le corps B, fonctionnant en sens inverse, enlève à la source K_1 la quantité de chaleur mQ'_1, et porte sur la source K_2 la quantité de chaleur mQ'_2. La source supérieure a donc reçu la quantité de chaleur

$$mQ'_2 - nQ_2,$$

et la source inférieure a perdu la quantité

$$mQ'_1 - nQ_1.$$

Ces deux quantités de chaleur sont égales d'après l'équation (3), et elles sont positives d'après l'inégalité (4). Ainsi la machine complexe transporterait pendant chaque période une quantité de chaleur $mQ'_1 - nQ_1$ de la source inférieure à la source supérieure, sans aucune dépense de travail, ce qui est contraire à la loi expérimentale dont nous avons parlé.

On démontrerait de même que le second rapport ne peut être plus grand que le premier; ces deux rapports sont donc égaux et l'on a

$$(5) \qquad \frac{Q_2 - Q_1}{Q'_2 - Q'_1} = \frac{Q_2}{Q'_2} \quad \text{ou} \quad \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{Q'_2 - Q'_1}{Q'_2}.$$

57. Des rapports égaux $\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{Q'_2 - Q'_1}{Q'_1}$ on déduit

$$(6) \qquad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{Q'_2}{Q'_1}.$$

Ainsi, on peut énoncer le théorème précédent en disant que,

pour tous les corps fonctionnant suivant des cycles de Carnot entre les mêmes limites de température, le rapport $\frac{Q_2}{Q_1}$ de la quantité de chaleur puisée à la source supérieure à la quantité de chaleur versée sur la source inférieure est constant.

Ce rapport est le même pour tous les corps; il est indépendant des lignes adiabatiques μ_1 et μ_2 qui forment le cycle; il dépend uniquement des températures extrêmes t_1 et t_2; c'est donc une fonction de t_1 et t_2 et la *même* fonction pour tous les corps. Nous allons nous servir de cette propriété pour déterminer la fonction intégrante λ, dont nous avons démontré l'existence (n° 53).

Détermination de la fonction intégrante.

58. De la relation $dQ = \lambda\, d\mu$, dans laquelle λ désigne une fonction des deux variables t et μ, on déduit

$$Q_1 = \int_D^C \lambda\, d\mu, \quad Q_2 = \int_A^B \lambda\, d\mu,$$

la première intégration étant faite sur la ligne isotherme DC, la seconde sur la ligne isotherme AB (*fig.* 13). Désignons par λ_1 et λ_2 les valeurs de la fonction λ aux points D et A.

Si l'on appelle λ'_1 et λ'_2 des valeurs moyennes de λ sur les lignes DC et AB, on a

$$Q_1 = \lambda'_1(\mu_2 - \mu_1), \quad Q_2 = \lambda'_2(\mu_2 - \mu_1)$$

et, par suite,

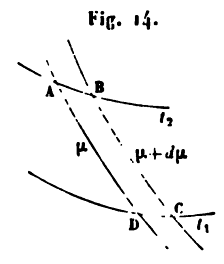
$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\lambda'_2}{\lambda'_1}.$$

D'après cela, le rapport $\frac{\lambda'_2}{\lambda'_1}$ est indépendant de μ_1 et μ_2; c'est une fonction de t_1 et t_2, la même pour tous les corps.

Supposons maintenant que les deux valeurs μ_1 et μ_2 diffèrent très peu l'une de l'autre (faisons $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = \mu + d\mu$), et que la ligne adiabatique μ_2 se rapproche indéfiniment de la ligne adiabatique μ_1, les valeurs moyennes λ'_1, λ'_2 sur les arcs infiniment petits DC et AB (*fig.* 14) tendront vers les valeurs

λ_1 et λ_2 de la fonction λ aux points D et A, et le rapport $\frac{\lambda'_2}{\lambda'_1}$ tendra vers une limite égale à $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. On en conclut que le rapport $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ des valeurs de la fonction λ aux points correspondants A et D de deux lignes isothermes t_2 et t_1, c'est-à-dire aux points d'intersection de ces deux lignes par une ligne adiabatique quelconque μ, est indépendant de μ; c'est une même fonction de t_1 et t_2 pour tous les corps.

Fig. 14.



59. Il résulte de là que la fonction λ est égale à une *même* fonction $f(t)$ de la température pour tous les corps, multipliée par une fonction de μ particulière et arbitraire pour chaque corps, c'est-à-dire que l'on a

$$\lambda = f(t) \times \varphi(\mu). \tag{7}$$

On peut vérifier d'abord que cette condition est suffisante; car, si elle est remplie, on a

$$\lambda_1 = f(t_1) \times \varphi(\mu),$$
$$\lambda_2 = f(t_2) \times \varphi(\mu),$$

d'où

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{f(t_2)}{f(t_1)}.$$

Le rapport $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ est alors pour tous les corps une même fonction des températures t_1 et t_2.

Je dis maintenant que la fonction λ est nécessairement de cette forme. En effet, puisque le rapport $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ est indépendant

de μ et qu'il est une même fonction de t_1 et t_2 pour tous les corps, le rapport $\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1}$, qui est égal à $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1$, et aussi l'expression

$$\frac{\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{t_2 - t_1}\right)}{\lambda_1}$$

jouissent de la même propriété. Imaginons que les deux lignes isothermes t_1 et t_2 soient infiniment voisines l'une de l'autre, et posons $t_1 = t$, $t_2 = t + dt$. La limite du rapport $\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{t_2 - t_1}$ est la dérivée partielle de la fonction λ par rapport à la variable t, et l'on a

$$\lim \frac{\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{t_2 - t_1}\right)}{\lambda_1} = \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial t}}{\lambda} = \frac{\partial \log \lambda}{\partial t}.$$

On en conclut que ce dernier rapport est indépendant de μ et qu'il est une *même* fonction de t pour tous les corps. Si l'on désigne par $\psi(t)$ cette fonction, on a

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial t} = \psi(t).$$

En intégrant par rapport à la variable t, et remarquant que la constante introduite par l'intégration est une fonction arbitraire de l'autre variable μ, on en déduit

$$\log \lambda = \int \psi(t)\, dt + \log \varphi(\mu),$$

ou

$$\lambda = \varphi(\mu) e^{\int \psi(t)\, dt}.$$

Si l'on pose

$$e^{\int \psi(t)\, dt} = f(t),$$

on arrive finalement à l'expression

$$\lambda = f(t)\, \varphi(\mu),$$

dans laquelle la fonction $f(t)$ est *la même* pour tous les corps.

Comme la fonction $\varphi(\mu)$ est arbitraire, on peut prendre $\varphi(\mu) = 1$, et l'on obtient la détermination la plus simple

$$\lambda = f(t). \tag{8}$$

Ainsi, *il existe une fonction intégrante* λ, *indépendante de* μ, *fonction de la température seule, et la même pour tous les corps.*

Température absolue et entropie

60. Il est naturel de se servir de cette fonction $\lambda = f(t)$, qui est la même pour tous les corps, pour construire une échelle des températures, que nous appellerons *échelle des températures absolues.* Si l'on désigne par T la température absolue, ceci revient à poser $T = \lambda$.

La relation $\frac{dQ}{\lambda} = d\mu$ devient

$$\frac{dQ}{T} = d\mu. \tag{9}$$

La quantité μ, qui correspond à la détermination simple $\lambda = f(t)$ de la fonction intégrante, est une fonction de l'état du corps, fonction particulière à chaque substance, et qui joue un rôle important dans l'étude de ses propriétés physiques; M. Clausius lui a donné le nom d'*entropie*, parce qu'elle préside en quelque sorte au jeu des transformations. D'après cela, les lignes adiabatiques seront appelées *lignes isentropiques*, c'est-à-dire lignes d'égale entropie.

La quantité de chaleur absorbée ou dégagée dans une transformation infiniment petite est

$$dQ = T\,d\mu; \tag{10}$$

pour une transformation quelconque, elle est donnée par l'intégrale

$$Q = \int_1^2 T\,d\mu,$$

évaluée suivant la ligne de transformation. Sur une ligne isotherme, la température étant constante, on a

$$Q = T(\mu_2 - \mu_1). \tag{11}$$

Ainsi, *la quantité de chaleur nécessaire pour opérer une transformation à température constante est égale au produit de la température absolue par la variation de l'entropie.*

Dans le cycle de Carnot, les quantités de chaleur

$$Q_2 = T_2(\mu_2 - \mu_1), \quad Q_1 = T_1(\mu_2 - \mu_1),$$

relatives aux deux côtés AB et DC (*fig.* 13), sont proportionnelles aux températures absolues T_1 et T_2. La quantité de chaleur convertie en travail

$$(12) \qquad Q_2 - Q_1 = (T_2 - T_1)(\mu_2 - \mu_1)$$

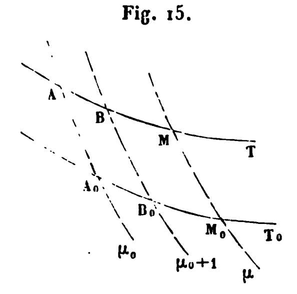
est égale au produit de la différence des températures par la différence des entropies; ce produit mesure l'aire du cycle ABCD. On en déduit

$$(13) \qquad \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}.$$

Ainsi, dans le *jeu direct de la machine, le rapport de la quantité de chaleur convertie en travail à la quantité de chaleur fournie par le foyer est égal au rapport de la différence des températures absolues à la température absolue du foyer.*

61. Voici comment on peut concevoir la graduation de l'échelle des températures absolues. Ayant choisi un corps

Fig. 15.



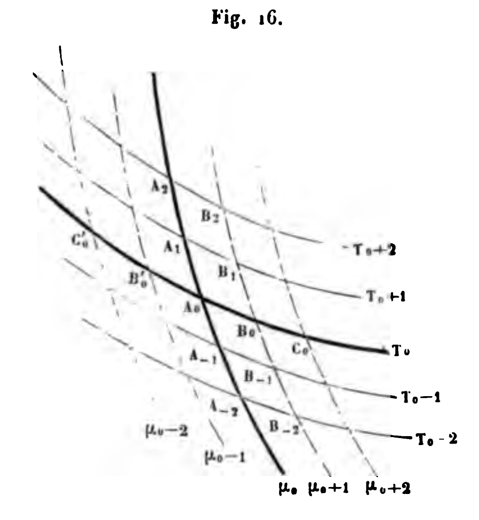
particulier comme *thermomètre*, on affectera à une ligne isotherme, prise à volonté, un nombre T_0 arbitraire (*fig.* 15) et à une ligne isentropique, prise aussi à volonté, un autre nombre

arbitraire μ_0; partant du point d'intersection A_0 de ces deux lignes, on parcourra sur la ligne T_0 un arc A_0B_0, tel que la quantité de chaleur nécessaire à la transformation soit égale à T_0; d'après la relation (11), la variation de l'entropie sera égale à l'unité, et par conséquent l'entropie au point B_0 sera $\mu_0 + 1$; on tracera la ligne isentropique passant par le point B_0. Pour avoir la température T relative à une ligne isotherme quelconque AM, on déterminera la quantité de chaleur Q nécessaire à la transformation suivant la portion AB de cette ligne isotherme qui est comprise entre les deux lignes isentropiques μ_0 et $\mu_0 + 1$; d'après la relation (11), on a $T = Q$.

De même, pour avoir l'entropie μ relative à une ligne isentropique quelconque M_0M, coupant la ligne isotherme T_0 au point M_0, on déterminera la quantité de chaleur Q' nécessaire à la transformation A_0M_0 sur cette ligne isotherme; de la relation $Q' = T_0(\mu - \mu_0)$ on déduira la valeur de μ. On obtient ainsi, par des mesures calorimétriques, la température absolue T et l'entropie μ du corps, dans un état quelconque M.

Si l'on veut graduer l'échelle des températures absolues par

Fig. 16.



degrés successifs, on déterminera sur la ligne isentropique μ_0 (*fig.* 16), d'un côté des points A_1, A_2, ... tels que les quantités

de chaleur nécessaires aux transformations A_1B_1, A_2B_2, ... sur les lignes isothermes passant par ces points, entre les deux lignes isentropiques μ_0 et μ_0+1, soient égales respectivement à T_0+1, T_0+2, ..., de l'autre côté des points A_{-1}, A_{-2}, ..., tels que les quantités de chaleur nécessaires aux transformations analogues $A_{-1}B_{-1}$, $A_{-2}B_{-2}$, ... soient respectivement égales à T_0-1, T_0-2, ...

En prenant sur la ligne isotherme T_0, de part et d'autre du point A_0, des arcs A_0B_0, B_0C_0, ..., $A_0B'_0$, $B'_0C'_0$, ..., tels que la quantité de chaleur relative à chacun d'eux soit égale à T_0, on graduera de même la suite des lignes isentropiques μ_0+1, μ_0+2, ..., μ_0-1, μ_0-2, ...

Remarquons que les deux séries de lignes forment un réseau de parallélogrammes curvilignes équivalents; car l'aire de chacun d'eux est égale à $(T_2-T_1)(\mu_2-\mu_1)$, c'est-à-dire à l'unité, puisque les deux différences T_2-T_1, $\mu_2-\mu_1$ sont égales à l'unité.

62. *Zéro absolu de la température.* — Sur une ligne isotherme particulière, par exemple celle qui correspond à la glace fondante, nous avons mis un nombre positif arbitraire T_0, puis, par des mesures calorimétriques, nous avons déterminé la série des températures croissantes et celle des températures décroissantes.

Les considérations mécaniques semblent prouver que, tandis que la partie ascendante de l'échelle des températures se prolonge à l'infini, la partie descendante s'arrête à une certaine limite, au-dessous de laquelle elle ne peut descendre. Quand une machine fonctionne suivant un cycle de Carnot (*fig.* 13), entre deux lignes isentropiques données μ_1 et μ_2, l'entropie μ_2 étant plus grande que μ_1, si la température T_2 du foyer est constante, la quantité de chaleur transformée en travail $Q_2-Q_1=(T_2-T_1)(\mu_2-\mu_1)$ est d'autant plus grande que la température T_1 du réfrigérant est plus basse. Si la température absolue T_1 du réfrigérant était égale à zéro, la quantité de chaleur Q_1 versée sur le réfrigérant étant nulle, toute la chaleur Q_2 fournie par le foyer serait convertie en travail. Il n'existe pas de température inférieure à cette température absolue zéro, car, si elle existait, elle serait représentée par un

nombre négatif $-T'_1$; sur la ligne isotherme CD, la machine absorberait une quantité de chaleur $Q'_1 = T'_1(\mu_2 - \mu_1)$, et la source inférieure jouerait aussi le rôle de foyer. Imaginons deux machines accouplées, formées par un même corps, l'une directe fonctionnant suivant un cycle de Carnot entre les deux températures $T_2 = o$ et $T_1 = -T'_1$, l'autre inverse fonctionnant aussi suivant un cycle de Carnot entre les deux températures $T_2 = T'_1$ et $T_1 = o$ et les mêmes lignes isentropiques μ_1 et μ_2 que la précédente. La première prendrait à la source inférieure K_1 une quantité de chaleur $T'_1(\mu_2 - \mu_1)$ qu'elle transformerait en travail; ce travail ferait marcher la seconde machine, qui créerait alors une quantité de chaleur égale se versant sur la source supérieure K_2. De cette manière, la chaleur passerait de la source inférieure à la source supérieure sans dépense de travail, ce qui est contraire à la loi admise précédemment (nº 55). Ainsi, dans l'échelle des températures absolues, il n'existe pas de température inférieure à zéro; cette température zéro est le *zéro absolu*.

63. *Remarques sur l'entropie.* — La température T et la pression p affectent également tous les corps, quelle que soit leur nature; car, dans l'état d'équilibre, la température est la même, ainsi que la pression. Mais, dans les mêmes conditions de température et de pression, le volume spécifique et l'entropie spécifique, c'est-à-dire le volume et l'entropie pour l'unité de poids, sont des quantités spéciales à chaque substance. Pour des poids différents d'une même substance homogène, le volume et l'entropie sont proportionnels aux poids. Le volume d'un système de corps est la somme des volumes de ces différents corps. De même, l'entropie d'un système de corps est la somme des entropies de ces différents corps.

Lorsque deux corps sont à la même température T et qu'une quantité infiniment petite de chaleur dQ passe de l'un à l'autre, la diminution d'entropie $\frac{dQ}{T}$ du premier étant égale à l'augmentation d'entropie du second, l'entropie totale reste constante.

Mais, lorsque les deux corps sont à des températures différentes T_2 et T_1, la chaleur passe du corps qui est à la température la plus élevée T_2 à l'autre corps; pendant un temps

infiniment petit, l'entropie du premier corps diminue de la quantité $\frac{dQ}{T_2}$, tandis que celle du second augmente d'une quantité plus grande $\frac{dQ}{T_1}$; l'entropie du système éprouve donc une augmentation égale à $\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) dQ$. Ainsi, la libre communication de la chaleur entre les corps a pour effet d'augmenter progressivement l'entropie totale du système. Quand le système considéré n'est en communication calorifique avec aucun corps extérieur, c'est-à-dire quand la chaleur totale contenue dans le système reste constante, l'entropie du système tend vers une valeur maximum, qui correspond à l'état d'équilibre de la température.

Dans le jeu d'une machine thermique réversible, la communication de chaleur se faisant à chaque instant entre la machine et un corps extérieur qui est à la même température que la machine, l'entropie du système reste constante. En particulier, si la machine fonctionne suivant un cycle de Carnot dans le sens direct, l'entropie du corps K_2 éprouve une diminution $\frac{Q_2}{T_2}$, celle du corps K_1 une augmentation égale $\frac{Q_1}{T_1}$.

64. *Analogies mécaniques.* — Sous sa forme primitive (n° 32), nous avons énoncé le théorème général des forces vives, en disant que la variation de l'énergie d'un système matériel quelconque est égale à la somme des travaux des forces extérieures qui s'exercent sur lui, plus la quantité de chaleur qu'il reçoit. La quantité de travail S′ et la quantité de chaleur Q, reçues par le système, entrent de la même manière dans l'équation des forces vives $\Delta U = S' + Q$. Lorsqu'un corps est soumis à une pression uniforme p, ou à une traction uniforme $-p$, sur toute sa surface, le travail reçu par le corps, pendant une transformation infiniment petite, est $dS' = -dS = -p\,dv$; la quantité de chaleur reçue par le corps, pendant la même transformation, d'après la relation fondamentale déduite du théorème de Carnot, est $dQ = T\,d\mu$. On voit que, dans les expressions $dQ = T\,d\mu$, $dS' = -p\,dv$ de ces deux quantités mécaniquement équivalentes, la température absolue T et la

traction $-p$ se correspondent, et de même l'entropie μ et le volume v.

65. *Les deux lois fondamentales.* — Nous possédons maintenant les deux principes, ou les deux lois fondamentales, de la Thermodynamique. Le premier est le théorème des forces vives, tel qu'on le déduit des lois générales de la Mécanique, quand on regarde la chaleur comme un mouvement des particules des corps, et qu'on définit la quantité de chaleur par la force vive ou l'énergie de ce mouvement; comme cette quantité de chaleur ou de force vive est équivalente à une quantité de travail, on a donné aussi à ce théorème le nom de *principe de l'équivalence.*

Le second est le théorème auquel Sadi Carnot est arrivé par la considération du jeu des machines thermiques; il conduit, comme nous l'avons vu, à la notion de la température absolue, et se traduit par la relation $\frac{dQ}{T} = d\mu$, où μ désigne une fonction de l'état du corps; elle signifie que, pour une même variation de l'entropie, la quantité de chaleur absorbée ou dégagée, dans une transformation réversible infiniment petite, est proportionnelle à la température absolue. Pour une transformation finie, cette relation devient

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} = \mu_2 - \mu_1.$$

Si le corps décrit un cycle, c'est-à-dire revient à l'état initial, la variation de l'entropie étant nulle, on a l'équation

$$\int \frac{dQ}{T} = 0.$$

Il en résulte que, *dans tout cycle réversible, la somme algébrique des quotients obtenus en divisant la quantité de chaleur relative à chaque élément du cycle par la température absolue est égale à zéro.*

On comprendra toute l'importance de cette seconde loi, si l'on réfléchit que l'on ne connaît pas les conditions mécaniques de l'équilibre de la température entre deux corps, excepté dans des cas très particuliers, et seulement d'une manière ap-

prochée. Aussi la nouvelle théorie de la chaleur eût-elle été arrêtée dès ses premiers pas sans le théorème de Carnot, qui permet de définir et de mesurer la température absolue.

Il est à remarquer que Sadi Carnot est arrivé à son théorème, qui joue un rôle si important dans la nouvelle théorie, où l'on considère la chaleur comme un mouvement, en partant de l'idée de la matérialité du calorique. Dans son Ouvrage publié en 1824 ([1]), sous le titre de *Réflexions sur la force motrice du feu*, il regarde « la production de la puissance motrice dans les machines à vapeur, et en général dans toutes les machines mises en mouvement par la chaleur, comme due, non à une consommation réelle du calorique, mais à son transport d'un corps chaud à un corps froid. On peut, dit-il, comparer avec assez de justesse la puissance motrice de la chaleur à celle d'une chute d'eau : toutes deux ont un maximum que l'on ne peut pas dépasser, quelle que soit d'une part la machine destinée à recevoir l'action de l'eau et quelle que soit, de l'autre, la substance employée à recevoir l'action de la chaleur. La puissance motrice d'une chute d'eau (il entend par là le travail qu'elle est capable d'effectuer) dépend de sa hauteur et de la quantité du liquide; la puissance motrice de la chaleur dépend aussi de la quantité de calorique employé et de ce qu'on pourrait nommer la hauteur de sa chute, c'est-à-dire de la différence de température des corps entre lesquels se fait l'échange du calorique. » Il démontre ensuite, par un raisonnement analogue à celui du n° 56, que « la puissance motrice de la chaleur est indépendante des agents mis en œuvre pour la réaliser, et qu'elle dépend uniquement des températures des corps entre lesquels se fait le transport du calorique ».

Cependant les idées de Sadi Carnot sur la nature de la chaleur s'étaient promptement modifiées; peu d'années après la publication de son livre, il regardait la chaleur comme un mouvement, et la transformation de la force vive en travail comme la cause de la puissance motrice de la chaleur. Des notes inédites, publiées à la suite d'une nouvelle édition de

([1]) Sadi Carnot était le fils du grand Carnot; il est né à Paris en 1796, mort en 1832.

l'ouvrage que nous avons cité, ne laissent aucun doute à cet égard. Après diverses considérations sur la production de la chaleur par la percussion, le frottement, la compression des gaz, « la chaleur, dit-il, est donc le résultat d'un mouvement; alors il est tout simple qu'elle puisse se produire par la consommation de puissance motrice, et qu'elle puisse produire cette puissance (ce travail). La chaleur n'est autre chose que la puissance motrice, ou plutôt que le mouvement qui a changé de forme. C'est un mouvement dans les particules des corps. Partout où il y a destruction de puissance motrice, il y a, en même temps, production de chaleur en quantité précisément proportionnelle à la quantité de puissance motrice détruite. Réciproquement, partout où il y a destruction de chaleur, il y a production de puissance motrice. On peut donc poser, en thèse générale, que la puissance motrice est en quantité invariable dans la nature; qu'elle n'est jamais, à proprement parler, ni produite, ni détruite. A la vérité, elle change de forme, c'est-à-dire qu'elle produit tantôt un genre de mouvement, tantôt un autre; mais elle n'est jamais anéantie. » On reconnaît là le principe de l'équivalence et le théorème de la conservation de l'énergie. Il est donc juste de regarder Sadi Carnot comme le principal fondateur de la Thermodynamique.

CHAPITRE III.

RELATIONS ENTRE LES PROPRIÉTÉS PHYSIQUES D'UNE SUBSTANCE.

66. Nous nous proposons d'étudier les transformations d'un corps homogène dont tous les points sont à la même température et qui est soumis à une pression uniforme sur toute sa surface. Le théorème des forces vives,

$$dU = dQ - p\,dv,$$

combiné avec l'expression

$$dQ = T\,d\mu,$$

déduite du théorème de Carnot, conduit à l'équation fondamentale

$$(1) \qquad dU = T\,d\mu - p\,dv.$$

Des quatre quantités T, μ, p, v, qui entrent dans le second membre, deux à volonté peuvent être prises comme variables indépendantes pour définir l'état du corps à chaque instant; les deux autres, ainsi que l'énergie U du corps, seront alors des fonctions de ces deux variables. A chacun de ces modes, qui sont au nombre de six, correspond une expression particulière de la différentielle totale dU de l'énergie; la condition connue à laquelle satisfont les deux coefficients différentiels donnera, pour chacune d'elles, une relation entre deux phénomènes physiques.

67. *Première relation.* — Prenons d'abord μ et v comme variables indépendantes. L'équation (1) donne la différentielle totale de la fonction U de ces deux variables; par conséquent, les deux quantités T et $-p$, qui sont aussi des fonctions de ces

deux variables, sont les dérivées partielles de la fonction U par rapport à chacune d'elles, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{\partial U}{\partial \mu} = T, \quad \frac{\partial U}{\partial v} = -p.$$

On en déduit la dérivée partielle du second ordre

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \mu \partial v} = \frac{\partial T}{\partial v} = -\frac{\partial p}{\partial \mu}.$$

Afin d'éviter toute confusion, nous désignerons la dérivée partielle $\frac{\partial T}{\partial v}$ par la notation $\left(\frac{dT}{dv}\right)_\mu$, indiquant par là que les variations dT et dv, dans ce rapport, correspondent à une transformation dans laquelle l'entropie μ reste constante; de même, nous désignerons la dérivée partielle $\frac{\partial p}{\partial \mu}$ par $\left(\frac{dp}{d\mu}\right)_v$, indiquant que dans ce rapport les variations dp et $d\mu$ se rapportent à une transformation dans laquelle le volume v reste constant. On obtient ainsi la relation

$$\text{(I)} \qquad \left(\frac{dT}{dv}\right)_\mu = -\left(\frac{dp}{d\mu}\right)_v,$$

que l'on peut écrire

$$-\left(\frac{dT}{dv}\right)_\mu = T\left(\frac{dp}{dQ}\right)_v.$$

Dans le premier rapport, dT est la variation de température résultant d'une variation du volume suivant une ligne isentropique; une dilatation brusque, ou une compression, produit cet effet. Dans le second rapport, dp est l'accroissement de pression produite par une addition de chaleur à volume constant. L'équation (I) établit une relation entre ces deux phénomènes.

68. *Deuxième relation.* — Variables indépendantes μ et p. L'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$(2) \qquad d(U + vp) = T\,d\mu + v\,dp.$$

En raisonnant comme précédemment, on en déduit la relation

$$\text{(II)} \qquad \left(\frac{dT}{dp}\right)_\mu = \left(\frac{dv}{d\mu}\right)_p,$$

ou

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)_\mu = T\left(\frac{dv}{dQ}\right)_p.$$

Dans le premier rapport, dT est l'élévation de température produite par un accroissement de pression suivant une ligne isentropique. Dans le second, dv est l'augmentation de volume produite par une addition de chaleur sous pression constante.

L'eau, à une température inférieure à 4° C., présente un phénomène particulier. Une addition de chaleur produisant une diminution de volume, une compression brusque doit produire un abaissement de température; c'est en effet ce qui a été vérifié par l'expérience.

69. *Troisième relation.* — Variables indépendantes T et v. De l'équation (1), mise sous la forme

$$(3) \qquad d(U - T\mu) = -\mu\, dT - p\, dv,$$

on déduit la relation

$$(\mathrm{III}) \qquad \left(\frac{d\mu}{dv}\right)_T = \left(\frac{dp}{dT}\right)_v,$$

ou

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_v = \frac{1}{T}\left(\frac{dQ}{dv}\right)_T.$$

Dans le premier rapport, dp est l'accroissement de pression produit par une élévation de température à volume constant. Dans le second, dQ est la quantité de chaleur nécessaire pour dilater le corps à température constante.

70. *Quatrième relation.* — Variables indépendantes T et p. L'équation (1), mise sous la forme

$$(4) \qquad d(U - T\mu + pv) = -\mu\, dT + v\, dp,$$

donne la relation

$$(\mathrm{IV}) \qquad \left(\frac{d\mu}{dp}\right)_T = -\left(\frac{dv}{dT}\right)_p,$$

ou

$$\left(\frac{dv}{dT}\right)_p = \frac{1}{T}\left(\frac{-dQ}{dp}\right)_p.$$

Dans le premier rapport, dv est l'augmentation de volume produite par une élévation de température sous pression contante; on appelle en général *coefficient de dilatation* la quantité $\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{dv}{dT}\right)_p$; le premier rapport est donc égal à αv. Dans le second rapport, $-dQ$ est la chaleur dégagée par un accroissement de pression à température constante.

Remarquons que ces quatre premières relations ont lieu entre un phénomène thermométrique et un phénomène calorimétrique.

71. *Cinquième relation.* — Variables indépendantes v et p. L'équation (1), dans laquelle on remplace $d\mu$ par sa valeur

$$d\mu = \frac{\partial\mu}{\partial v}\,dv + \frac{\partial\mu}{\partial p}\,dp,$$

devient

$$dU = \left(T\frac{\partial\mu}{\partial v} - p\right)dv + T\frac{\partial\mu}{\partial p}\,dp, \tag{5}$$

et l'on a

$$\frac{\partial U}{\partial v} = T\frac{\partial\mu}{\partial v} - p, \quad \frac{\partial U}{\partial p} = T\frac{\partial\mu}{\partial p}.$$

En prenant la dérivée de la première expression par rapport à la variable p, celle de la seconde par rapport à la variable v, on en déduit

$$\frac{\partial^2 U}{\partial v\,\partial p} = \frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial\mu}{\partial v} + T\frac{\partial^2\mu}{\partial v\,\partial p} - 1 = \frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial\mu}{\partial p} + T\frac{\partial^2\mu}{\partial v\,\partial p},$$

ce qui donne la relation

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)_v\left(\frac{d\mu}{dv}\right)_p - \left(\frac{dT}{dv}\right)_p\left(\frac{d\mu}{dp}\right)_v = 1. \tag{V}$$

72. *Sixième relation.* — Variables indépendantes T et μ. L'équation (1), dans laquelle on remplace dv par sa valeur

$$dv = \frac{\partial v}{\partial T}\,dT + \frac{\partial v}{\partial\mu}\,d\mu,$$

devient

$$(6)\qquad dU = -p\frac{\partial v}{\partial T}dT + \left(T - p\frac{\partial v}{\partial \mu}\right)d\mu$$

on en déduit

$$(\text{VI})\qquad \left(\frac{dp}{dT}\right)_\mu \left(\frac{dv}{d\mu}\right)_T - \left(\frac{dv}{dT}\right)_\mu \left(\frac{dp}{d\mu}\right)_T = 1.$$

Mais cette sixième relation rentre dans les précédentes; car, si dans la relation (V) on remplace chaque rapport par un rapport égal donné par l'une des quatre premières relations, on obtient la relation (VI).

73. *Résumé.* — Quand l'une des quatre quantités T, μ, p, v reste constante, les rapports des variations des trois autres, prises deux à deux, sont au nombre de trois; mais ils se réduisent à deux; par exemple, les trois rapports dans lesquels v est constant satisfont à l'identité

$$\left(\frac{d\mu}{dT}\right)_v = \left(\frac{d\mu}{dp}\right)_v \left(\frac{dp}{dT}\right)_v.$$

On a donc en tout huit rapports distincts, entre lesquels existent les cinq relations que nous venons d'obtenir, et que nous écrivons à la suite les unes des autres :

$$(\text{I})\qquad \left(\frac{dT}{dv}\right)_\mu = -\left(\frac{dp}{d\mu}\right)_v,$$

$$(\text{II})\qquad \left(\frac{dT}{dp}\right)_\mu = \left(\frac{dv}{d\mu}\right)_p,$$

$$(\text{III})\qquad \left(\frac{d\mu}{dv}\right)_T = \left(\frac{dp}{dT}\right)_v,$$

$$(\text{IV})\qquad \left(\frac{d\mu}{dp}\right)_T = -\left(\frac{dv}{dT}\right)_p,$$

$$(\text{V})\qquad \left(\frac{dT}{dp}\right)_v \left(\frac{d\mu}{dv}\right)_p - \left(\frac{dT}{dv}\right)_p \left(\frac{d\mu}{dp}\right)_v = 1.$$

Les quatre premières relations signifient que les rapports dans lesquels l'une des quantités μ ou T est constante sont égaux respectivement à des rapports dans lesquels l'une des

quantités v ou p est constante. La cinquième lie ces quatre derniers rapports.

Il est facile de se rappeler les quatre premières relations, dont on fait souvent usage. L'équation fondamentale

$$(1) \qquad dU = T\,d\mu - p\,dv$$

donne immédiatement la première. On en déduit les trois autres en permutant les deux lettres p et v, ou T et μ, qui entrent dans un même terme de l'équation (1), et changeant le signe de l'un des membres à chaque permutation. Ainsi, en permutant p et v dans la première relation, on obtient la seconde; en y permutant T et μ, on obtient la troisième; en effectuant à la fois les deux permutations, on obtient la quatrième.

Chaleurs spécifiques et élasticités.

74. Il y a deux sortes de chaleurs spécifiques, la chaleur spécifique à volume constant, et la chaleur spécifique à pression constante. Elles ont pour expressions

$$(7) \qquad C_v = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_v = T\left(\frac{d\mu}{dT}\right)_v,$$

$$(8) \qquad C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = T\left(\frac{d\mu}{dT}\right)_p.$$

Leur différence

$$C_p - C_v = T\left(\frac{dp}{dT}\right)_v\left(\frac{dv}{dT}\right)_p\left[\left(\frac{dT}{dp}\right)_v\left(\frac{d\mu}{dv}\right)_p - \left(\frac{dT}{dv}\right)_p\left(\frac{d\mu}{dp}\right)_v\right],$$

en vertu de la relation (V), se réduit à

$$(9) \qquad C_p - C_v = T\left(\frac{dp}{dT}\right)_v\left(\frac{dv}{dT}\right)_p.$$

75. On a de même, comme nous l'avons déjà dit (n°s 39 et 48), deux élasticités, l'élasticité à température constante et l'élasticité à entropie constante,

$$(10) \qquad E_T = -v\left(\frac{dp}{dv}\right)_T,$$

$$(11) \qquad E_\mu = -v\left(\frac{dp}{dv}\right)_\mu.$$

Leur différence, en vertu de la relation (VI), a pour expres sion

$$(12)\qquad E_\mu - E_T = -v\left(\frac{dT}{dv}\right)_\mu\left(\frac{d\mu}{dv}\right)_T.$$

Le rapport des deux élasticités est égal à celui des chaleurs spécifiques; on a, en effet,

$$\frac{E_\mu}{E_T} = \frac{\left(\frac{dp}{dT}\right)_\mu\left(\frac{dT}{dv}\right)_\mu}{\left(\frac{dp}{d\mu}\right)_T\left(\frac{d\mu}{dv}\right)_T},$$

et, en vertu des quatre premières relations,

$$\frac{E_\mu}{E_T} = \frac{\left(\frac{d\mu}{dv}\right)_p\left(\frac{dp}{d\mu}\right)_v}{\left(\frac{dT}{dv}\right)_p\left(\frac{dp}{dT}\right)_v} = \frac{\left(\frac{d\mu}{dT}\right)_p}{\left(\frac{d\mu}{dT}\right)_v};$$

par conséquent,

$$(13)\qquad \frac{E_\mu}{E_T} = \frac{C_p}{C_v}.$$

76. La quantité de chaleur absorbée ou dégagée dans une transformation infiniment petite est $dQ = T\,d\mu$. Si l'on regarde l'entropie comme une fonction des deux variables T et v, on a

$$d\mu = \left(\frac{d\mu}{dT}\right)_v dT + \left(\frac{d\mu}{dv}\right)_T dv,$$

et, par suite,

$$dQ = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_v dT + \left(\frac{dQ}{dv}\right)_T dv.$$

Le premier rapport est la chaleur spécifique à volume constant; le second, que nous désignerons par l, est ce qu'on appelle *la chaleur latente de dilatation;* l'équation précédente devient ainsi

$$(14)\qquad dQ = C_v\,dT + l\,dv.$$

On en déduit

$$(15)\qquad dU = dQ - p\,dv = C_v\,dT + (l-p)\,dv.$$

Si l'on regarde l'entropie comme une fonction des deux variables T et p, on a de même

$$d\mu = \left(\frac{d\mu}{dT}\right)_p dT + \left(\frac{d\mu}{dp}\right)_T dp,$$

et, en vertu de la relation (IV),

$$d\mu = \left(\frac{d\mu}{dT}\right)_p dT - \left(\frac{dv}{dT}\right)_p dp,$$

ou

(16) $$dQ = C_p\, dT - \alpha v T\, dp.$$

On en déduit

(17) $$d(U + vp) = dQ + v\, dp = C_p\, dT + v(1 - \alpha T)\, dp.$$

CHAPITRE IV.

PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DES GAZ.

Lois de Mariotte et de Gay-Lussac. — Loi de Joule. — Conséquences de ces lois. — La température absolue est marquée par le thermomètre à air. — Chaleurs spécifiques et élasticités. — Vitesse du son. — Équivalent mécanique de la chaleur.

Lois expérimentales.

77. Les gaz, à une température beaucoup plus élevée que la température limite au-dessous de laquelle ils peuvent être liquéfiés (nº 42), et les vapeurs très éloignées de leur point de saturation, tendent vers un état idéal que l'on appelle *gaz parfait*. Ils suivent alors, avec une approximation de plus en plus grande, des lois générales très simples. La première de ces lois, à laquelle on est arrivé par l'expérience, est la loi de Mariotte; elle consiste en ce que, à la même température, le produit de la pression par le volume reste constant; avec le thermomètre à gaz, elle donne la relation (nº 40)

$$pv = p_0 v_0 (1 + \alpha t).$$

La seconde loi expérimentale est celle de Gay-Lussac; elle indique que le coefficient de dilatation α est le même pour tous les gaz. Si l'on pose $a = \frac{1}{\alpha}$, $(a = 273)$, la relation précédente prend la forme

$$pv = \alpha p_0 v_0 (a + t). \tag{1}$$

78. *Loi de Joule.* — Une troisième loi expérimentale est celle de Joule : elle apprend que l'*énergie d'un gaz est fonction de la température seule*. Dans l'une de ses expériences, M. Joule employait deux récipients métalliques égaux, réunis

à la partie inférieure par un tube à robinet et plongés dans un même calorimètre à eau. L'un des vases contenait 120gr d'air sec à la pression de 22atm, l'autre vase était vide, ou du moins renfermait de l'air à une pression inférieure à un millième d'atmosphère. Quand on ouvre le robinet, le gaz se répartit également dans les deux récipients et le calorimètre n'accuse aucune variation de température. L'air contenu dans le premier vase était à une température t, et il possédait une certaine énergie U. Le second vase étant vide, le gaz double de volume, sans effectuer aucun travail extérieur; d'ailleurs, le calorimètre n'indiquant aucune variation de température, la transformation s'est opérée sans absorption ni dégagement de chaleur. Si dans l'équation générale des forces vives $\Delta U = Q - S$ on fait $S = 0$ et $Q = 0$, il vient $\Delta U = 0$. Ainsi l'énergie U du gaz est restée constante pendant la transformation; elle est donc indépendante du volume et par conséquent fonction de la température seule. Nous représenterons cette fonction par $U = F(t)$.

Mesure des températures absolues.

79. Ces lois expérimentales conduisent à des conséquences importantes. Si, dans l'équation des forces vives

$$dQ = dU + p\,dv,$$

on remplace p par sa valeur tirée de l'équation (1), et si l'on tient compte de ce que l'énergie du gaz est fonction de la température seule, on a

$$dQ = F'(t)\,dt + \frac{\alpha p_0 v_0 (a+t)}{v}\,dv,$$

d'où

$$d\mu = \frac{dQ}{T} = \frac{F'(t)}{T}\,dt + \frac{\alpha p_0 v_0}{v}\,\frac{a+t}{T}\,dv.$$

Mais l'entropie μ du gaz est une fonction des variables t et v; ses deux dérivées partielles sont

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} = \frac{F'(t)}{T}, \quad \frac{\partial\mu}{\partial v} = \frac{\alpha p_0 v_0}{v}\,\frac{a+t}{T}$$

La première $\frac{F'(t)}{T}$ étant une fonction de la température seule, sa dérivée $\frac{\partial^2 \mu}{\partial t \partial v}$ par rapport à v est nulle; il faut donc que la dérivée de la seconde par rapport à t soit aussi nulle, ce qui exige que le rapport $\frac{a+t}{T}$ soit constant. Si sur l'échelle des températures absolues on indique la température de la glace fondante $t=0$ par le nombre $T_0 = a = 273$, ce rapport est égal à un, et l'on a

$$T = a + t. \tag{2}$$

On en conclut que *la température absolue est marquée par le thermomètre à air*. Le zéro absolu correspond à $t = -273°$.

Coefficient de dilatation.

80. D'après cela, l'équation (1) prend la forme

$$pv = \alpha p_0 v_0 T, \tag{3}$$

ou

$$\frac{pv}{T} = \frac{p_0 v_0}{T_0}. \tag{3'}$$

Si l'on prend la dérivée des deux membres de l'équation (3) par rapport à T, en y regardant p comme constante, on a

$$p\left(\frac{dv}{dT}\right)_p = \alpha p_0 v_0 = \frac{pv}{T},$$

d'où l'on déduit

$$\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{dv}{dT}\right)_p = \frac{1}{T}. \tag{4}$$

Ainsi, *le coefficient de dilatation de tous les gaz, à une température quelconque, est égal à l'inverse de la température absolue.*

Si l'on prend la dérivée des deux membres de l'équation (3) par rapport à T, en y regardant v comme constant, on a de même

$$\beta = \frac{1}{p}\left(\frac{dp}{dT}\right)_v = \frac{1}{T}; \tag{5}$$

ce second coefficient, qui indique l'accroissement relatif de la pression, produit par une élévation de température à volume constant, est aussi égal à l'inverse de la température absolue.

Chaleurs spécifiques et élasticités.

81. Si, dans l'équation des forces vives

$$dQ = F'(t)\,dT + p\,dv = \frac{dU}{dT}\,dT + p\,dv,$$

on fait $dv = 0$, on a la chaleur spécifique à volume constant

$$(6) \qquad C_v = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_v = \frac{dU}{dT}.$$

Si, dans la même équation, mise sous la forme

$$dQ = \left(\frac{dU}{dT} + \alpha\, p_0\, v_0\right) dT - v\,dp,$$

à l'aide de l'équation (3), on fait $dp = 0$, on a la chaleur spécifique à pression constante

$$(7) \qquad C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = \frac{dU}{dT} + \alpha\, p_0\, v_0.$$

On en conclut que *les deux chaleurs spécifiques sont des fonctions de la température seule.*

De ces deux expressions on déduit

$$(8) \qquad C_p - C_v = \alpha\, p_0\, v_0.$$

Ainsi, *la différence des deux chaleurs spécifiques est une constante pour chaque gaz, et le rapport de cette différence au volume spécifique est une même constante pour tous les gaz.*

82. En faisant $dT = 0$ dans l'équation des forces vives sous les deux formes précédentes, on obtient, d'une part, la *chaleur latente de dilatation*

$$(9) \qquad l = \left(\frac{dQ}{dv}\right)_T = p,$$

d'autre part, la *chaleur dégagée par un accroissement de pres-*

sion à température constante

$$(10) \qquad k = \left(\frac{-dQ}{dp}\right)_T = v.$$

Le premier coefficient est égal à la pression, le second au volume spécifique.

83. De l'équation (3), dans laquelle on regarde T comme constante, on déduit

$$(11) \qquad E_T = -v\left(\frac{dp}{dv}\right)_T = p;$$

ainsi, *l'élasticité à température constante est égale à la pression.*

Si, dans les deux formes de l'équation des forces vives, dont nous avons fait usage, on fait $dQ = 0$, on a

$$\left(\frac{dv}{dT}\right)_\mu = -\frac{1}{p}\frac{dU}{dT} = -\frac{C_v}{p},$$

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_\mu = \frac{1}{v}\left(\frac{dU}{dT} + \alpha p_0 v_0\right) = \frac{C_p}{v};$$

en divisant ces deux rapports l'un par l'autre, on obtient l'élasticité suivant une ligne isentropique

$$(12) \qquad E_\mu = -v\left(\frac{dp}{dv}\right)_\mu = \frac{C_p}{C_v}p;$$

on vérifie ainsi la relation générale

$$\frac{E_\mu}{E_T} = \frac{C_p}{C_v},$$

trouvée au n° 75.

84. L'expérience apprend que *la chaleur spécifique à pression constante* C_p *est indépendante de la température.* On conclut de la relation (8) que *la chaleur spécifique à volume constant* C_v *est aussi indépendante de la température.* Ce sont donc deux quantités constantes pour chaque gaz.

L'équation (6)

$$\frac{dU}{dT} = C_v$$

donne par l'intégration

(13) $$U - U_0 = C_v(T - T_0).$$

La variation de l'énergie d'un gaz est proportionnelle à la variation de la température absolue. Si l'on admet qu'au zéro absolu l'énergie est nulle, l'expression précédente devient

(14) $$U = C_v T.$$

Entropie d'un gaz.

85. La différentielle de l'entropie écrite au n° 79 devient

$$d\mu = C_v \frac{dT}{T} + (C_p - C_v)\frac{dv}{v}.$$

En intégrant, on obtient l'expression de l'entropie

(15) $$\mu - \mu_0 = \log\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{C_v}\left(\frac{v}{v_0}\right)^{C_p - C_v}\right],$$

en fonction des deux variables T et v. En y remplaçant v ou T par la valeur tirée de l'équation (3'), on en déduit les deux autres formes

(16) $$\mu - \mu_0 = \log\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{C_p}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{C_v - C_p}\right],$$

(17) $$\mu - \mu_0 = \log\left[\left(\frac{v}{v_0}\right)^{C_p}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{C_v}\right].$$

Si l'on désigne par γ le rapport $\frac{C_p}{C_v}$ des deux chaleurs spécifiques, les équations précédentes montrent que, dans toute transformation isentropique, les trois quantités

(18) $$T v^{\gamma-1}, \quad T p^{\frac{1}{\gamma}-1}, \quad p v^{\gamma}$$

conservent des valeurs constantes.

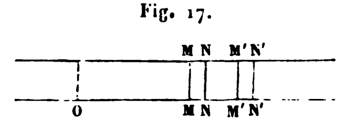
Vitesse de propagation du son.

86. La formule (8) donne la différence des deux chaleurs spécifiques; la vitesse du son détermine leur rapport avec une

grande précision; on obtient ainsi ces quantités de chaleur en unités mécaniques, c'est-à-dire en kilogrammètres. Dans les mesures calorimétriques, on prend pour unité de chaleur la *calorie;* c'est la chaleur nécessaire pour élever de 0° à 1° la température de 1^{kg} d'eau; on peut, par une expérience calorimétrique directe, déterminer la chaleur spécifique d'un gaz à pression constante en calories. La comparaison des nombres qui expriment la chaleur spécifique d'un même gaz à pression constante en kilogrammètres et en calories donne la valeur de la calorie en kilogrammètres; c'est ce qu'on appelle l'*équivalent mécanique de la chaleur.*

Nous allons d'abord chercher la formule de la vitesse du son. Considérons un tuyau cylindrique rempli d'un gaz homogène, à la température T, sous la pression p_1. Si ρ_1 est sa densité, v_1 son volume spécifique et ϖ_1 le poids d'un mètre cube de gaz dans ces conditions, on a $g\rho_1 = \varpi_1 = \frac{1}{v_1}\cdot$ Soit MN (*fig.* 17) une tranche infiniment mince dans l'état d'équilibre; nous désignerons par x sa distance OM à une origine fixe O et par h son épaisseur MN. Nous supposons que le mouvement du gaz dans le tuyau se fait par tranches, c'est-à-dire que le déplacement de chaque molécule est parallèle à l'axe du tuyau, et que toutes les molécules qui sont situées dans un même plan perpendiculaire à l'axe éprouvent au même instant des déplacements égaux. Pendant le mouvement, cette tranche se déplace et occupe au temps t la position M'N'; appelons ξ le déplacement MM' du plan M; on doit regarder ξ comme une

Fig. 17.



fonction des deux variables indépendantes x et t; nous la représenterons par $\xi = f(x, t)$. Quand on considérera les positions successives d'un même plan M pendant le mouvement, on regardera x comme constante et t comme variable; quand on considérera les positions simultanées de toutes les tranches au même instant, on regardera au contraire t comme constant et x comme variable. Pour avoir le déplacement NN' du

plan N au temps t, il suffit de remplacer x par $x+h$ dans la fonction $f(x, t)$, ce qui donne

$$NN' = f(x+h, t) = f(x, t) + f'_x(x, t)h = \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} h,$$

en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre. L'épaisseur de la tranche MN est devenue

$$M'N' = MN' - MM' = MN + NN' - MM' = h + \frac{\partial \xi}{\partial x} h;$$

le rapport des volumes spécifiques v et v_1 de la tranche pendant le mouvement et dans l'état d'équilibre étant égal à celui des volumes de la tranche elle-même, ou à celui des épaisseurs M'N' et MN, a pour limite, quand h tend vers zéro,

$$\frac{v}{v_1} = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}. \tag{19}$$

Le coefficient de dilatation de la tranche pendant le mouvement est

$$\frac{v - v_1}{v_1} = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

La dilatation ou la contraction de la tranche pendant le mouvement vibratoire s'opérant très rapidement, de manière que la chaleur n'a le temps ni d'entrer ni de sortir, la pression variable p est la fonction du volume spécifique

$$p = F(v), \tag{20}$$

qui se rapporte à une transformation isentropique. L'équation (19) donne le volume spécifique v dans le plan mobile M' au temps t; c'est une fonction des deux variables x et t; l'équation (20) donne ensuite la pression correspondante p au même instant.

Pour avoir le volume spécifique v' et la pression p' au même instant dans le plan mobile N', qui était primitivement en N à une distance h du premier, il suffit de remplacer x par $x+h$ en laissant t constant; on a alors

$$v' = v + \frac{\partial v}{\partial x} h,$$

$$p' = F(v') = F\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} h\right) = F(v) + F'(v) \frac{\partial v}{\partial x} h,$$

et si l'on remarque que, d'après l'équation (19), la dérivée partielle $\frac{\partial v}{\partial x}$ est égale à $v_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$, il vient

$$p' = p + v_1 F'(v) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} h.$$

Si l'on appelle A l'aire de la section droite du cylindre, le volume de la tranche MN est Ah, sa masse $Ah\rho_1$. Dans la position M'N' qu'elle occupe au temps t, elle est sollicitée par deux forces extérieures, la pression Ap qui s'exerce sur sa face M' dans le sens positif, et la pression Ap' qui s'exerce sur sa face N' en sens contraire. En appliquant à cette tranche le théorème général de Mécanique sur la somme des quantités de mouvement (n° **11**), on a l'équation

$$Ah\rho_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = A(p - p') = - A v_1 F'(v) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} h,$$

ou plus simplement

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{v_1 F'(v)}{\rho_1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \tag{21}$$

Jusqu'ici nous n'avons fait aucune hypothèse sur la grandeur du déplacement ξ de chaque tranche; si l'on suppose ce déplacement très petit, ce qui a lieu dans les mouvements vibratoires qui produisent le son, on pourra dans l'équation (21) négliger les quantités petites du second ordre, c'est-à-dire le carré de ξ, et par conséquent dans $F'(v)$ remplacer v par v_1; l'équation se réduit alors à une équation linéaire

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{- v_1 F'(v_1)}{\rho_1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Si l'on remarque que l'élasticité suivant une ligne isentropique est

$$E_\mu = - v \left(\frac{dp}{dv}\right)_\mu = - vF'(v),$$

elle prend la forme

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E_\mu}{\rho_1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \tag{22}$$

l'élasticité E_μ se rapportant à l'état d'équilibre.

87. Nous poserons, pour abréger,

$$(23) \qquad \omega = \sqrt{\frac{E_{\lambda}}{\rho_1}}.$$

On vérifie aisément que l'équation différentielle (22) admet pour intégrale générale

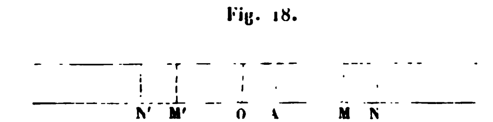
$$(24) \qquad \xi = \varphi(x - \omega t) + \psi(x + \omega t),$$

$\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant deux fonctions arbitraires, que l'on déterminera par l'ébranlement initial. Si l'on suppose l'ébranlement initial concentré entre deux plans perpendiculaires à l'axe et menés, l'un par l'origine O, l'autre par le point A (*fig.* 18), à une distance ε du premier, ces deux fonctions seront nulles pour toutes les valeurs positives de x plus grandes que ε et pour toutes les valeurs négatives. D'après cela, pour la partie du tube qui est à droite et à une distance de l'origine plus grande que ε, la fonction $\psi(x + \omega t)$ sera constamment nulle, et l'intégrale (24) se réduira à

$$\xi = \varphi(x - \omega t).$$

Le plan M, situé à la distance x de l'origine, commencera à être ébranlé au temps $t = \frac{x - \varepsilon}{\omega}$, pour lequel $x - \omega t = \varepsilon$, et il cessera de l'être au temps $t = \frac{x}{\omega}$ pour lequel $x - \omega t = 0$. Au temps t, la partie ébranlée vers la droite est comprise entre deux plans M et N, situés à des distances de l'origine

Fig. 18.



égales à ωt et à $\omega t + \varepsilon$. L'ébranlement initial se partage donc en deux ondes qui se propagent uniformément de part et d'autre avec la vitesse ω.

Le raisonnement précédent s'applique à la propagation des vibrations longitudinales dans tous les corps, gaz, liquides, ou solides. Dans les gaz en particulier, si l'on désigne par γ le

rapport $\frac{C_p}{C_v}$ des deux chaleurs spécifiques, la formule (12) donne $E_\mu = \gamma p_1$, et la formule (23) devient

$$(25) \qquad \omega = \sqrt{\frac{\gamma p_1}{\rho_1}} = \sqrt{\gamma g p_1 v_1} = \sqrt{\gamma g \alpha p_0 v_0 T}.$$

La vitesse de propagation du son est proportionnelle à la racine carrée de la température absolue.

Équivalent mécanique de la chaleur.

88. De la vitesse de la propagation du son on déduit le rapport des chaleurs spécifiques

$$(26) \qquad \gamma = \frac{\omega^2}{g \alpha p_0 v_0 T}.$$

L'équation (8) donne ensuite la chaleur spécifique à pression constante,

$$(27) \qquad C_p = \frac{\alpha p_0 v_0}{1 - \frac{1}{\gamma}},$$

exprimée en kilogrammètres.

Si l'on désigne par c cette même chaleur spécifique évaluée en calories, l'équivalent mécanique de la chaleur, ou le rapport de la calorie au kilogrammètre, sera

$$(28) \qquad E = \frac{C_p}{c} = \frac{\alpha p_0 v_0}{c\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)}.$$

De la vitesse limite du son (c'est-à-dire de la vitesse de propagation des vibrations infiniment petites), déduite de ses observations, Regnault a conclu le rapport $\gamma = 1,3945$. En prenant ensuite

$$\alpha = 0,00367, \quad p_0 = 10333^{k}, \quad \varpi_0 = \frac{1}{v_0} = 1^{k},293187, \quad c = 0,2377,$$

il a trouvé, pour l'équivalent mécanique de la chaleur,

$$E = 436.$$

CHAPITRE V.

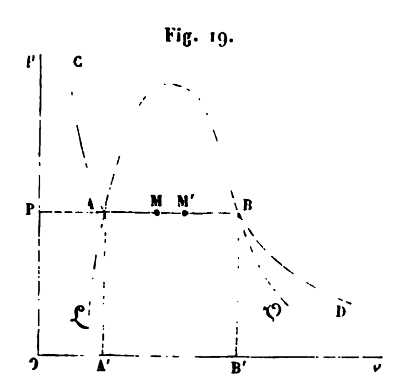
CHALEURS LATENTES DANS LES CHANGEMENTS D'ÉTAT.

Liquide et vapeur. — Relation entre la chaleur latente et la pression. — Eau et glace. — Chaleur spécifique de la vapeur saturante. — Relation entre cette chaleur spécifique et celle du liquide. — Entropie d'un mélange de liquide et de vapeur. — Énergie. — Travail dans la détente de la vapeur d'eau.

Liquide et vapeur.

89. Nous avons dit (n° 41) que la pression p de la vapeur en contact avec une surface liquide plane est indépendante de la quantité de liquide; c'est une fonction de la température seule. Quand le changement d'état s'opère à température constante, la pression restant elle-même constante, la portion de la ligne isotherme correspondante est une droite AB, parallèle à l'axe Ov (*fig.* 19). Nous avons désigné par u le vo-

Fig. 19.



lume spécifique PA du liquide sous la pression normale de vaporisation p, par u' le volume spécifique PB de la vapeur saturante normale; ces trois quantités u, u', p sont des fonctions

de la température seule. La transformation de 1^{kg} de liquide en vapeur suivant la droite AB exige une certaine quantité L de chaleur, que l'on appelle *chaleur latente* de vaporisation, et qui est aussi fonction de la température.

La chaleur latente produit un travail extérieur ABB'A' égal à $p(u'-u)$; mais la plus grande partie de cette chaleur est employée à l'augmentation d'énergie qu'éprouve le liquide quand il passe à l'état de vapeur. Regnault a déterminé par expérience la chaleur latente de vaporisation pour quelques liquides à diverses températures, et il a représenté par des formules empiriques les résultats de ses observations. Pour l'eau, il a trouvé

$$L = E(606,50 - 0,695t);$$

le travail extérieur accompli est

$$p(u'-u) = E(31,10 + 0,096t);$$

on en déduit l'accroissement d'énergie

$$\Delta U = E(576,40 - 0,791t).$$

La vingtième partie à peu près de la chaleur latente sert à effectuer le travail extérieur qui accompagne la dilatation de l'eau quand elle se change en vapeur; le reste produit l'augmentation d'énergie intérieure.

Pour définir le mélange de liquide et de vapeur, nous avons appelé x le poids de la vapeur, $1-x$ celui du liquide, et nous avons vu (n° 41) que le volume du mélange est donné par la formule

$$v = u + (u'-u)x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{v-u}{u'-u}.$$

L'état du mélange de liquide et de vapeur dépend des deux variables T et x ou T et v.

Relation entre la chaleur latente et la pression.

90. La quantité de chaleur dQ nécessaire pour une transformation infiniment petite MM' (*fig.* 19) d'un mélange de liquide et de vapeur, suivant la droite AB, est la quantité de chaleur nécessaire pour vaporiser un poids dx de liquide à la tempé-

ature T; on a donc

$$dQ = L\,dx = \frac{L}{u'-u}\,dv,$$

et, par suite,

$$d\mu = \frac{dQ}{T} = \frac{L}{T(u'-u)}\,dv;$$

on en déduit

$$\left(\frac{d\mu}{dv}\right)_T = \frac{L}{T(u'-u)},$$

et, en vertu de la relation (III) du n° 73,

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_v = \frac{L}{T(u'-u)}.$$

Mais, tant qu'il reste en présence du liquide et de la vapeur, la pression p est indépendante de x et par conséquent du volume v; on a donc, d'une manière générale,

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(u'-u)},$$

ou

(1) $$\frac{L}{T} = (u'-u)\frac{dp}{dT}.$$

Telle est la relation remarquable qui existe entre la chaleur latente et la pression normale de vaporisation, à la même température.

La vraie chaleur latente de vaporisation L', c'est-à-dire celle qui représente l'accroissement d'énergie du corps, a pour expression

$$L' = L - p(u'-u).$$

On en déduit

$$\frac{L'}{T} = \frac{L}{T} - \frac{p(u'-u)}{T},$$

et, d'après l'équation (1),

$$\frac{L'}{T} = (u'-u)\frac{dp}{dT} - \frac{p(u'-u)}{T} = (u'-u)\left(\frac{dp}{dT} - \frac{p}{T}\right),$$

ou

(2) $$\frac{L'}{T} = (u'-u)\,T\,\frac{d\left(\frac{p}{T}\right)}{dT}.$$

Eau et glace.

91. La relation (1) s'applique également au phénomène de la solidification. En désignant toujours par u le volume spécifique du liquide, on appellera u' celui du solide; l'état du mélange sera défini par le poids x du solide. Mais, comme dans le passage de l'état liquide à l'état solide il y a dégagement de chaleur latente, il faudra changer le signe de L. De l'équation (1) on déduit ainsi

$$\frac{dT}{dp} = -(u' - u)\frac{T}{L}.$$

Ordinairement, u' est plus petit que u, et la température normale de fusion augmente avec la pression. Mais pour l'eau, u' étant plus grand que u, on en conclut que la température normale de fusion de la glace *s'abaisse* quand la pression augmente. C'est le phénomène qui a déjà été signalé au n° 46, comme conséquence de la position des lignes isothermes. La formule précédente permet de calculer cet abaissement de température; à la température $t = 0$ ou $T = 273$, on a

$$\frac{u' - u}{u} = \frac{1}{11,43}, \quad u' - u = \frac{0,001}{11,43}, \quad L = 79^{cal},5 = 34662^{kgm}.$$

On trouve ainsi qu'un accroissement de pression d'une atmosphère, 10333^{kg}, produit un abaissement de température de $\frac{1}{136}$ de degré C. Ce résultat, prévu par M. James Thomson, a été vérifié par M. William Thomson. M. Mousson a pu abaisser la température de fusion de la glace jusqu'à — 18°, en exerçant une pression très grande.

M. Helmholtz a aussi démontré, par une expérience ingénieuse, que, réciproquement, si la pression diminue au-dessous de la pression atmosphérique, la température de fusion de la glace s'élève.

92. On peut de la même manière expliquer les expériences curieuses de Faraday et de M. Tyndall. Une expérience de M. Tyndall consiste à placer de la glace pilée entre deux moules de buis très épais, creusés de cavités lenticulaires dans les deux faces en regard. On comprime énergiquement la glace

entre les deux moules, et, quand on les écarte ensuite, on constate qu'il s'est formé une lentille de glace parfaitement homogène et transparente. La glace s'est fondue, en partie au moins, pendant la compression, et le liquide formé s'est solidifié de nouveau à la pression atmosphérique. Faraday a désigné ce phénomène sous le nom de *regel*. Il suffit du reste que deux morceaux de glace se touchent sous une légère pression pour qu'on les voie se souder l'un à l'autre. Quand deux corps solides se touchent par un élément de surface ω et sont pressés l'un contre l'autre avec une force F, la pression p par unité de surface est $p = \frac{F}{\omega}$; elle peut être très grande à cause de la petitesse de ω. S'il s'agit de deux morceaux de glace, la pression qui s'exerce au point de contact abaissant la température de fusion, une petite quantité de glace se fond en cet endroit; l'eau qui en résulte, se répandant à l'entour, et n'étant plus soumise à la même pression, se gèle de nouveau. Mais, à mesure que le phénomène se produit, la surface de contact ω s'élargit et la pression p diminue. Le phénomène cesse quand la surface ω est devenue assez grande pour que la pression p soit inférieure à la pression normale de fusion relative à la température de l'expérience.

C'est là ce qui se passe quand on comprime des morceaux de glace dans un vase; les morceaux se touchent par leurs aspérités, sur lesquelles s'exerce la pression la plus forte; ces aspérités fondent, les morceaux glissent les uns sur les autres, se touchent en de nouveaux points qui fondent à leur tour; en même temps, l'eau provenant de la fusion se loge dans les vides, où, n'étant plus soumise à la même pression, elle se congèle de nouveau; à la fin, on a un bloc de glace présentant la forme du vase.

Toutefois, ce bloc de glace, comme l'a montré M. Bertin, diffère par ses propriétés optiques d'un bloc de glace naturel : ce dernier, formé de cristaux orientés tous dans la même direction, présente des apparences de polarisation colorée, tandis que le premier, dont les particules sont orientées dans tous les sens, se comporte comme un morceau de verre.

Ces phénomènes, produits par la pression, paraissent jouer un rôle important dans la marche des glaciers. On sait que les

glaciers marchent comme des fleuves : d'après les observations de M. Tyndall, la mer de glace du Montanvers, à Chamouni, s'avance de $0^m,4$ par jour d'hiver et de $0^m,75$ par jour d'été. La pression exercée par la colonne de glace à sa base produit une fusion locale et permet un glissement sur les rochers qui forment le lit du glacier.

Chaleur spécifique de la vapeur saturante.

93. Considérons une transformation infiniment petite de la vapeur saturante normale, et désignons par α' et C'_p le coefficient de dilatation et la chaleur spécifique à pression constante de la vapeur dans le voisinage du point de saturation. Nous aurons, en vertu de la formule (16) du n° 76,

$$dQ = C'_p\, dT - \alpha' u' T\, dp,$$

et, en remarquant que la pression p de la vapeur saturante est une fonction de la température seule,

$$dQ = \left(C'_p - \alpha' u' T \frac{dp}{dT}\right) dT.$$

Si l'on pose

(3) $$m' = C'_p - \alpha' u' T \frac{dp}{dT},$$

on a

(4) $$dQ = m'\, dT.$$

Cette quantité m', que l'on appelle *chaleur spécifique de la vapeur saturante normale,* est la différence de deux quantités positives; on conçoit qu'elle soit positive pour certaines vapeurs, négatives pour d'autres; comme elle est fonction de la température, on conçoit aussi que, pour une même vapeur, elle change de signe avec la température. C'est précisément ce qui a lieu.

A l'inspection du Tableau suivant, qui a été calculé par M. Clausius, on remarque que la quantité m' est positive pour la vapeur d'éther, négative pour la vapeur d'eau et que, pour la benzine et le chloroforme, elle est d'abord négative, puis

positive. Comme la valeur relative de m' va en croissant dans tous les cas, on est conduit à penser que, pour toutes les vapeurs, la chaleur spécifique de la vapeur saturante est négative au-dessous d'une certaine température, positive au-dessus.

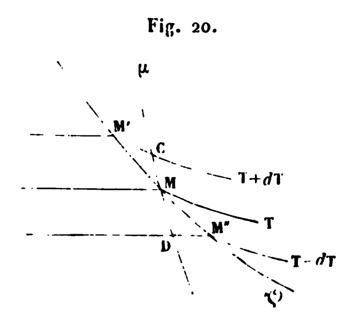
NATURE DU LIQUIDE.	t	m'
	°	cal
Vapeur d'eau	58,21	− 1,398
	92,66	− 1,206
	117,17	− 1,107
	144,74	− 0,807
Vapeur d'éther	0	+ 0,116
	40	+ 0,120
	80	+ 0,128
	120	+ 0,133
Benzine	0	− 0,155
	70	− 0,038
	140	+ 0,048
	210	+ 0,115
Chloroforme	0	− 0,107
	40	− 0,047
	80	− 0,001
	120	+ 0,050

94. La transformation que nous venons de considérer s'accomplit sur la ligne Ψ (*fig.* 19), qui figure le volume et la pression de la vapeur saturante normale à diverses températures.

Le signe de m' indique la disposition des lignes isentropiques par rapport à cette ligne. Supposons d'abord m' négative; quand on s'élève de M en M' sur la ligne Ψ (*fig.* 20), le volume u' de la vapeur saturante diminue et la température augmente; la quantité de chaleur $dQ = m'\,dT$, qui correspond à la transformation MM', est négative, c'est-à-dire qu'il y a dégagement de chaleur; si l'on rétablit cette chaleur dégagée, la vapeur se dilatera de M' en C sur la ligne isotherme $T + dT$, en s'éloignant de son point de saturation M'; la quantité de chaleur relative à la transformation MM'C étant nulle, le point C appartient à la ligne isentropique μ, qui passe par

le point M. Au contraire, quand on descend de M en M″ sur la ligne ϑ, la température diminue et il y a absorption de chaleur; si l'on enlève cette chaleur ajoutée, une partie de la vapeur se condensera suivant la partie rectiligne M″D de la ligne

Fig. 20.



isotherme T — dT; le point D appartient aussi à la ligne μ. Ainsi, quand la chaleur spécifique m' de la vapeur saturante est négative, la partie supérieure de la ligne isentropique μ est à droite de la ligne ϑ, la partie inférieure à gauche.

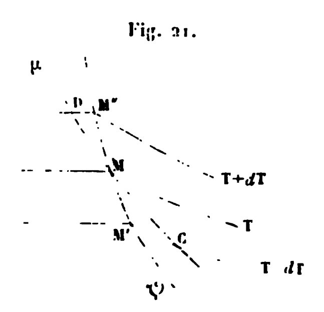
Il en résulte deux phénomènes importants: 1° une compression brusque MC de la vapeur saturante normale à la température T, sur la ligne isentropique μ, l'amène à l'état C de vapeur surchauffée, c'est-à-dire éloignée du point de saturation normale M', qui correspond à la température actuelle T + dT. 2° Une dilatation brusque MD l'amène à l'état de mélange de liquide et de vapeur, défini par le point D sur la ligne isotherme T — dT; une portion de la vapeur, représentée par la longueur M″D, s'est condensée. On en conclut qu'*une compression brusque surchauffe la vapeur d'eau et qu'une détente brusque produit une condensation partielle.*

Lorsque m' est positive, la disposition des courbes est inverse; la partie supérieure de la ligne μ est à gauche de la ligne ϑ, la partie inférieure à droite (*fig.* 22). *Une détente brusque surchauffe la vapeur d'éther, une compression brusque produit une condensation partielle.*

Cette condensation de la vapeur d'eau pendant la détente joue un rôle important dans les machines à vapeur; elle a été démontrée théoriquement à peu près à la même époque par

M. Clausius et par Rankine. M. Hirn l'a vérifiée expérimentalement. Pour cela, il introduit de la vapeur saturante bien sèche, et à une pression plus grande que la pression atmosphérique, dans un cylindre fermé par deux plaques de verre;

Fig. 21.



le cylindre est alors parfaitement transparent. Quand on le met en communication avec l'atmosphère en ouvrant un robinet, il y a dilatation rapide, la vapeur se condense en partie et forme dans le cylindre un nuage opaque de gouttelettes liquides.

M. Hirn a réalisé aussi l'expérience inverse avec la vapeur d'éther. Il remplit de vapeur d'éther sèche et saturante un ballon communiquant avec un cylindre dans lequel peut se mouvoir un piston. Quand on pousse rapidement le piston dans le cylindre, la vapeur est comprimée, et il se forme un nuage indiquant une condensation partielle.

Relation entre les chaleurs spécifiques du liquide et de la vapeur.

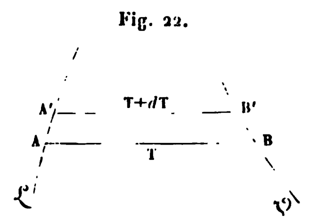
95. Nous avons désigné par m' la chaleur spécifique de la vapeur saturante normale; désignons de même par m la chaleur spécifique du liquide suivant la ligne $\mathfrak{L}$ (*fig.* 22), c'est-à-dire sous la pression normale de vaporisation, et posons

$$(5)\qquad m = C_p - \alpha u T \frac{dp}{dT}.$$

Considérons la variation de l'entropie sur le cycle AA'B'BA, formé des parties rectilignes AB et A'B' de deux lignes iso-

thermes T et $T + dT$ infiniment voisines, et des deux arcs AA′, B′B appartenant aux lignes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{V}$. Sur la droite AB,

Fig. 22.



la quantité de chaleur absorbée étant L, l'accroissement de l'entropie est $\frac{L}{T}$; sur la droite A′B′, cet accroissement devient $\frac{L}{T} + d\left(\frac{L}{T}\right)$; sur les arcs AA′ et BB′, l'entropie éprouve les variations $\frac{m\,dT}{T}$, $\frac{m'\,dT}{T}$. Quand on parcourt le cycle AA′B′BA, l'entropie devant reprendre au point de départ sa valeur primitive, la somme algébrique de ses variations est nulle, et l'on a l'équation

$$\frac{m\,dT}{T} + \left(\frac{L}{T} + d\frac{L}{T}\right) - \frac{m'\,dT}{T} - \frac{L}{T} = 0,$$

d'où l'on déduit la relation

$$m' - m = T\,\frac{d\left(\frac{L}{T}\right)}{dT}, \tag{6}$$

qui donne la différence des chaleurs spécifiques de la vapeur saturante et du liquide.

A cause de la petitesse du coefficient de dilatation α du liquide, la quantité m, définie par l'équation (5), diffère très peu de la chaleur spécifique C_p à pression constante. L'équation (6) permet ainsi de calculer, avec une grande approximation, la chaleur spécifique m' de la vapeur saturante.

Entropie et énergie d'un mélange de liquide et de vapeur.

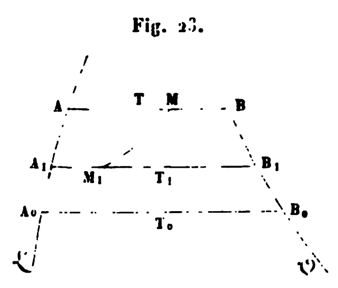
96. En désignant par μ_0 l'entropie du liquide en A_0 sur la ligne $\mathcal{L}$, à la température T_0, et prenant la variation sur le

chemin $A_0A + AM$ (*fig.* 23), qui conduit au point M, figurant le mélange d'un poids x de vapeur et d'un poids $1 - x$ de liquide, à la température T, on a

$$(7)\qquad \mu - \mu_0 = \int_{T_0}^{T} \frac{m}{T}\,dT + \frac{Lx}{T}.$$

Cette équation, dans laquelle on regarde T et x comme des

Fig. 23.



variables, et μ comme une constante arbitraire, est l'équation générale des lignes isentropiques d'un mélange de liquide et de vapeur, sous forme finie. En la différentiant, on obtient l'équation différentielle de ces mêmes lignes

$$(8)\qquad d\left(\frac{Lx}{T}\right) + \frac{m}{T}\,dT = 0.$$

Si l'on retranche membre à membre de l'équation (7) l'équation

$$\mu_1 - \mu_0 = \int_{T_0}^{T_1} \frac{m}{T}\,dT + \frac{L_1 x_1}{T_1},$$

qui donne l'entropie au point M_1, défini par les valeurs T_1 et x_1 attribuées aux variables T et x, on obtient l'équation

$$(9)\qquad \mu - \mu_1 = \int_{T_1}^{T} \frac{m}{T}\,dT + \frac{Lx}{T} - \frac{L_1 x_1}{T_1},$$

qui détermine la variation de l'entropie du mélange sur ligne quelconque M_1M.

L'équation

$$(10) \qquad \frac{\mathrm{L}x}{\mathrm{T}} - \frac{\mathrm{L}_1 x_1}{\mathrm{T}_1} + \int_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{T}} \frac{m}{\mathrm{T}}\, d\mathrm{T} = 0$$

représente la ligne isentropique qui passe par le point M_1.

97. La quantité de chaleur nécessaire pour effectuer la transformation $\mathrm{A}_0\mathrm{A} + \mathrm{AM}$ est

$$\mathrm{Q} = \int_{\mathrm{T}_0}^{\mathrm{T}} m\, d\mathrm{T} + \mathrm{L}x.$$

Le travail extérieur accompli pendant cette transformation est

$$\mathrm{S} = \int_{\mathrm{T}_0}^{\mathrm{T}} p\, du + p(v - u),$$

ou, en intégrant par parties,

$$\mathrm{S} = pv - p_0 u_0 - \int_{\mathrm{T}_0}^{\mathrm{T}} u\, dp.$$

Si l'on appelle U_0 l'énergie du liquide en A_0 et U celle du mélange en M, comme on a $\Delta\mathrm{U} = \mathrm{Q} - \mathrm{S}$, on en déduit

$$(11) \quad \mathrm{U} - \mathrm{U}_0 = \mathrm{L}x - (pv - p_0 u_0) + \int_{\mathrm{T}_0}^{\mathrm{T}} \left(m + u\frac{dp}{d\mathrm{T}}\right) d\mathrm{T}.$$

La variation de l'énergie sur une ligne $\mathrm{M}_1\mathrm{M}$ passant par le point M_1 est

$$(12) \quad \mathrm{U} - \mathrm{U}_1 = (\mathrm{L}x - \mathrm{L}_1 x_1) - (pv - p_1 v_1) + \int_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{T}} \left(m + u\frac{dp}{d\mathrm{T}}\right) d\mathrm{T}.$$

Si la ligne $\mathrm{M}_1\mathrm{M}$ est une ligne isentropique, on a $\mathrm{Q} = 0$, $\mathrm{S} = -\Delta\mathrm{U}$, et par suite

$$(13) \quad \mathrm{S} = (\mathrm{L}_1 x_1 - \mathrm{L}x) + (pv - p_1 v_1) - \int_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{T}} \left(m + u\frac{dp}{d\mathrm{T}}\right) d\mathrm{T};$$

telle est l'expression du travail accompli par le mélange de liquide et de vapeur, pendant une transformation sur la ligne isentropique passant par le point M_1.

Travail de la détente dans la vapeur d'eau.

98. Ces formules permettent de calculer les effets de la détente de la vapeur d'eau dans les machines à vapeur. La détente, étant brusque, s'effectue suivant une ligne isentropique. On donne l'état initial, c'est-à-dire la température T_1 de la chaudière et le titre x_1 du mélange de liquide et de vapeur qu'elle envoie dans le corps de pompe. Pendant la détente, la température diminue et une condensation de plus en plus grande de la vapeur se produit; l'équation (10), dans laquelle on remplacera approximativement m par C_p, donnera le titre x du mélange à une température T inférieure à T_1; de l'équation $v = u + (u' - u)x$ on déduira le volume v; l'équation (13) déterminera ensuite le travail accompli pendant cette partie de la détente. Voici les résultats trouvés par M. Clausius, en supposant $t_1 = 150°$, $x_1 = 1$, c'est-à-dire que la vapeur soit d'abord saturante et sèche, à la température de 150° C :

t.	x.	$\frac{v}{v_1}$.	S.
150°	1	1	»
125	0,956	1,88	11300^{kgm}
100	0,911	3,90	23200
75	0,866	9,23	35900
50	0,821	25,7	49300
25	0,776	88,7	63900

A la température de 50°, le volume est déjà 26 fois plus grand que le volume primitif.

CHAPITRE VI.

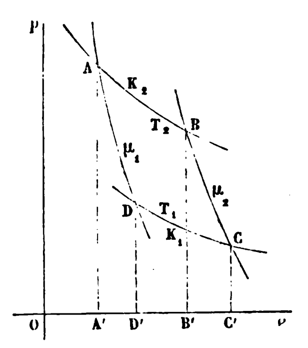
MACHINES A FEU.

Principes généraux. — Machine à air. — Machine à vapeur. — Machine idéale. — Machine réelle. — Détente incomplète. — Chemise à vapeur de Watt. — Emploi de la vapeur surchauffée. — Machine à deux liquides.

Principes généraux.

99. Les machines à feu directes ont pour objet de transformer la chaleur en travail. Considérons d'abord une machine à feu fonctionnant suivant un cycle de Carnot ABCD (*fig.* 24),

Fig. 24.



et mise alternativement en communication avec un foyer ou source de chaleur K_2 à la température T_2 et un réfrigérant K_1 à la température T_1. La machine prend au foyer une quantité de chaleur Q_2 et verse sur le réfrigérant une quantité plus petite Q_1. La différence $Q_2 - Q_1$ a été transformée en un travail extérieur S, figuré par l'aire ABCD.

On appelle *coefficient économique* ou *rendement* d'une ma-

chine à feu le rapport de la quantité de chaleur transformée en travail à la quantité de chaleur prise au foyer; ce rapport

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2},$$

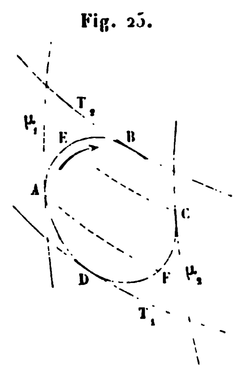
comme on l'a vu au n° 60, dépend uniquement des températures extrêmes entre lesquelles fonctionne la machine. Dans la pratique, il faut chercher à augmenter ce rapport; pour cela, on abaisse la température inférieure T_1 et l'on élève la température supérieure T_2, autant qu'il est possible. Supposons, par exemple, que la température supérieure soit de 300° C. et la température inférieure de 15°; la valeur du coefficient économique sera

$$\frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{t_2 - t_1}{a + t_2} = \frac{285}{273 + 300} = \frac{285}{573}, \quad \text{environ } \frac{1}{2}.$$

Ce serait là une condition très avantageuse au point de vue du rendement; on ne l'a jamais réalisée.

100. Considérons maintenant une machine fonctionnant suivant un cycle quelconque ABCD (*fig.* 25). On suppose

Fig. 25.



que la machine est en communication alternativement avec une source à température variable, à laquelle elle emprunte de la chaleur pendant une phase de la transformation, et avec un réfrigérant à température variable, auquel elle cède

de la chaleur. Menons deux lignes isothermes T_1 et T_2 et deux lignes isentropiques μ_1 et μ_2 tangentes à ce cycle, de manière à lui circonscrire un cycle de Carnot, et désignons par A, B, C, D les points de contact de ces quatre courbes avec le cycle proposé.

Dans la partie ABC du cycle, la machine absorbe de la chaleur; car l'entropie μ va en croissant du point A au point C et l'on a, pour une transformation infiniment petite, $dQ = T\,d\mu$. Dans la partie CDA, elle dégage au contraire de la chaleur. Ces deux quantités de chaleur sont données par les intégrales définies

$$Q_2 = \int_{ABC} T\,d\mu, \quad Q_1 = \int_{ADC} T\,d\mu,$$

évaluées, la première suivant la ligne ABC, la seconde suivant la ligne ADC. Si l'on désigne par T'_2 et T'_1 des valeurs moyennes de la température sur ces deux lignes, on a

$$Q_2 = T'_2(\mu_2 - \mu_1), \quad Q_1 = T'_1(\mu_2 - \mu_1),$$

d'où

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T'_2 - T'_1}{T'_2} = 1 - \frac{T'_1}{T'_2}.$$

Le rendement est le même que si la machine fonctionnait suivant un cycle de Carnot entre la température T'_2 inférieure à T_2 et la température T'_1 supérieure à T_1; il est plus petit que si elle fonctionnait suivant un cycle de Carnot entre les deux températures extrêmes T_2 et T_1. Pour deux températures extrêmes données, le cycle de Carnot est donc le plus avantageux; il donne le rendement maximum. Ce qui le caractérise, c'est que le foyer fournit de la chaleur à la machine à température constante, et que le dégagement de chaleur dans le réfrigérant s'opère aussi à température constante.

Machines à air.

101. Lorsqu'une machine à air fonctionne suivant un cycle de Carnot ABCD (*fig.* 24), il est facile, d'après les propriétés des gaz, de calculer toutes les circonstances du phénomène. Supposons que la machine contienne 1^{kg} d'air et désignons par v_1, v_2, v'_2, v'_1 les volumes du gaz aux points A, B, C, D.

Suivant la ligne isotherme AB, l'énergie U_2 du gaz restant constante (n° 78), toute la chaleur absorbée Q_2 est convertie en travail extérieur ABB'A'.

Sur la ligne isentropique BC, l'énergie du gaz diminue; la perte d'énergie $U_2 - U_1$ est convertie en un travail extérieur BCC'B'.

Sur la ligne isotherme CD, l'énergie U_1 restant constante, le travail extérieur CDD'C', dépensé pour la compression du gaz, est converti en une quantité égale de chaleur Q_1 versée sur le réfrigérant.

Enfin, sur la ligne isentropique DA, le travail extérieur DAA'D' nécessaire pour produire l'augmentation $U_2 - U_1$ d'énergie est égal au travail BCC'B' accompli par la machine pendant la détente BC. Les deux phases BC et DA de la transformation se compensent donc exactement.

Si l'on se donne les volumes v_1 et v_2 au commencement et à la fin de la transformation isotherme AB, on calculera le volume v'_1 en D et le volume v'_2 en C à la fin de la détente, en remarquant que sur chacune des lignes isentropiques AD, BC, la quantité $Tv^{\gamma-1}$ conserve une valeur constante (n° 85); on en déduit

$$\frac{v'_1}{v_1} = \frac{v'_2}{v_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

L'énergie restant constante sur les lignes isothermes AB, DC, l'équation des forces vives $dQ = dU + p\,dv$ se réduit à

$$dQ = p\,dv = \alpha p_0 v_0 T \frac{dv}{v};$$

les quantités de chaleur sont déterminées par les relations

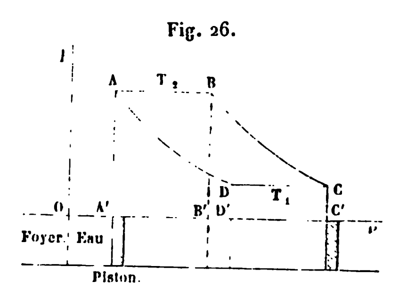
$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1} = \alpha p_0 v_0 \log\frac{v_2}{v_1}.$$

Machines à vapeur.

102. *Machine idéale.* — On peut se représenter une machine à vapeur fonctionnant, suivant un cycle de Carnot, de la manière suivante. Un même cylindre remplirait à la fois le rôle de chaudière, de corps de pompe et de condenseur. Supposons

que le cylindre contienne 1kg d'eau à la température T_2 et sous la pression correspondante p_2; la chaleur fournie par le foyer transforme une partie de cette eau en vapeur à la température constante T_2; cette première phase de l'opération est représentée par une droite AB (*fig.* 26), parallèle à l'axe Ov, puisque la tension de la vapeur est constante. On laisse ensuite la détente s'opérer suivant une ligne isentropique BC,

Fig. 26.



jusqu'à la température T_1. Pendant la troisième phase, on comprime le mélange à la température constante T_1, suivant la droite CD, et l'on peut supposer que le cylindre est alors entouré d'eau froide à la température T_1. Enfin on comprime de nouveau suivant la ligne isentropique DA, de manière à ramener le mélange à son état primitif A.

Le long de la ligne isotherme AB, une portion x_2 du liquide s'est transformée en vapeur, et le foyer a fourni pour cela une quantité de chaleur $Q_2 = L_2 x_2$. De B en C, le mélange se détend sans gain ni perte de chaleur; une partie de la vapeur se condense (n° 94); si l'on appelle x_1 le titre du mélange en C, on aura, d'après l'équation (10) du n° 96,

$$(1) \qquad \frac{L_1 x_1}{T_1} = \frac{L_2 x_2}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{T} dT.$$

Cette équation permet de calculer x_1; on connaîtra donc l'état du mélange à la fin de la détente, au point C.

Suivant la ligne isotherme CD, une nouvelle quantité de vapeur se condense, à la température constante T_1; si l'on appelle x' le titre du mélange au point D, la quantité de cha-

leur versée sur le réfrigérant est $Q_1 = L_1(x_1 - x')$. Quant à la valeur de x', elle sera déterminée par la condition que le mélange revienne du point D au point A, c'est-à-dire à l'état primitif, en suivant une ligne isentropique. Il faut pour cela que l'on ait, en remarquant qu'au point A la valeur de x est nulle,

$$\frac{L_1 x'}{T_1} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{T}\, dT. \tag{2}$$

La quantité x_2 de vapeur produite est donnée arbitrairement, et l'on peut calculer toutes les autres quantités en fonction de celle-là. En retranchant l'équation (2) de l'équation (1) membre à membre, on obtient

$$\frac{L_1(x_1 - x')}{T_1} = \frac{L_2 x_2}{T_2}.$$

La valeur de Q_1 peut donc s'écrire

$$Q_1 = L_2 x_2 \frac{T_1}{T_2}.$$

La quantité de chaleur convertie en travail est alors

$$Q_2 - Q_1 = L_2 x_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2}.$$

On voit d'abord que le coefficient économique a pour expression

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2},$$

ce qui devait être, puisque la machine fonctionne suivant un cycle de Carnot.

Le travail extérieur effectué par la machine est

$$S = L_2 x_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2}.$$

Tel est le travail effectué par un poids x_2 de vapeur. Pour 1^{kg} de vapeur, le travail est

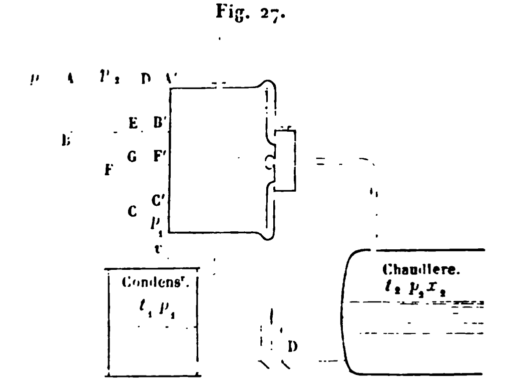
$$S = L_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2}; \tag{3}$$

c'est là le maximum de travail que puisse produire 1^{kg} de vapeur entre les limites de températures données.

On n'a pas encore réalisé de machine à vapeur dont le jeu s'effectue suivant un cycle de Carnot. Nous dirons quelques mots des machines réelles.

103. *Machines réelles.* — Considérons une machine à double effet et à condensation, fonctionnant avec une chaudière à la température T_2 et un réfrigérant à la température T_1. Appelons x_2 le titre de la vapeur mélangée de gouttelettes liquides que fournit la chaudière, p_2 la pression correspondante, et supposons que le poids du mélange employé à chaque coup de piston soit de 1^{kg}. Ce mélange arrive au-dessus du piston et agit à pleine pression pendant une partie de la course A'B' (*fig.* 27); alors, par le jeu du tiroir, la communication

Fig. 27.



du corps de pompe avec la chaudière est interrompue, et la vapeur se détend pendant que le piston marche de B' en C'. Nous supposerons la détente complète, c'est-à-dire que la pression de la vapeur au point C', à l'extrémité de la course du piston, soit égale à la pression p_1 qui correspond à la température T_1 du condenseur.

Le foyer fournit d'abord une quantité de chaleur égale à $\int_{T_1}^{T_2} m\,dT$, pour porter l'eau alimentaire de la température T_1

à la température T_2; une fraction x_2 de ce liquide est ensuite transformée en vapeur à la température T_2, ce qui exige une quantité de chaleur égale à $L_2 x_2$. La chaleur totale fournie par le foyer est donc

$$Q_2 = L_2 x_2 + \int_{T_1}^{T_2} m\,dT.$$

Après la détente, le mélange est à la température T_1 et renferme un poids $1 - x_1$ de liquide qui n'éprouve aucun changement et un poids x_1 de vapeur qui se liquéfie dans le condenseur et dégage une quantité Q_1 de chaleur égale à $L_1 x_1$. La quantité de chaleur transformée en travail est donc

$$(4) \qquad S = Q_2 - Q_1 = L_2 x_2 - L_1 x_1 + \int_{T_1}^{T_2} m\,dT,$$

et, en remplaçant x_1 par sa valeur (1),

$$(5) \qquad S = L_2 x_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} m\left(1 - \frac{T_1}{T}\right) dT.$$

104. On arrive au même résultat en évaluant directement le travail. La face inférieure du piston, étant toujours en communication avec l'atmosphère du condenseur, supporte la pression p_1. Pendant la phase AB, la différence des pressions qui agissent sur les deux faces du piston est $p_2 - p_1$; si v_2 est le volume du mélange en B, le travail accompli à pleine pression est $v_2(p_2 - p_1)$. Si l'on désigne par v_1 le volume du mélange en C, et si l'on tient compte de la pression p_1 qui s'exerce sur la face inférieure du piston, le travail accompli pendant la détente BC est, d'après l'équation (13) du n° 97,

$$L_2 x_2 - L_1 x_1 + p_1 v_1 - p_2 v_2 + \int_{T_1}^{T_2} \left(m + u\frac{dp}{dT}\right) dT - p_1(v_1 - v_2).$$

La somme est

$$L_2 x_2 - L_1 x_1 + \int_{T_1}^{T_2} m\,dT + \int_{p_1}^{p_2} u\,dp.$$

Il faut en retrancher le travail nécessaire pour le jeu de la

pompe alimentaire D qui, à chaque coup de piston, prend 1^{kg} de liquide dans le condenseur à la pression p_1 et le porte dans la chaudière sous la pression plus élevée p_2. Si l'on désigne par H la pression atmosphérique, le travail nécessaire pour soulever le piston de cette pompe est $(H - p_1)\,u_1$; pour comprimer un peu l'eau dans le corps de pompe et porter sa pression de p_1 à p_2, il faudra ensuite une quantité de travail égale à $\int_{u_2}^{u_1} p\,du - H(u_1 - u_2)$; l'eau pourra alors être refoulée dans la chaudière avec un travail $(p_2 - H)\,u_2$. Le travail nécessaire pour le jeu de la pompe alimentaire est donc $\int_{p_1}^{p_2} u\,dp$, et l'on retrouve la formule (4).

Lorsque la vapeur fournie par la chaudière est sèche, c'est-à-dire lorsque $x_2 = 1$, l'équation (5) devient

$$(6) \qquad S = L_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} m\left(1 - \frac{T_1}{T}\right) dT.$$

En remplaçant m par la chaleur spécifique C à pression constante et supposant cette chaleur spécifique constante, on a une formule suffisamment approchée pour la pratique

$$(7) \qquad S = L_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2} + C(T_2 - T_1) - CT_1 \log \frac{T_2}{T_1}.$$

105. Dans cette machine, le coefficient économique a pour valeur

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{L_2 x_2 \dfrac{T_2 - T_1}{T_2} + \displaystyle\int_{T_1}^{T_2} m\left(1 - \frac{T_1}{T}\right) dT}{L_2 x_2 + \displaystyle\int_{T_1}^{T_2} m\,dT};$$

on peut le mettre sous la forme

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} - \frac{T_1 \displaystyle\int_{T_1}^{T_2} m\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_2}\right) dT}{L_2 x_2 + \displaystyle\int_{T_1}^{T_2} m\,dT};$$

il est plus petit que si la machine fonctionnait suivant un cycle de Carnot; l'imperfection du jeu de la machine donne lieu à une perte de travail.

Il y a avantage à employer de la vapeur sèche; car, en faisant $x_2 = 1$, on diminue le second terme, et le coefficient économique se rapproche de la valeur maximum. Nous supposerons, dans tout ce qui suit, que la vapeur fournie par la chaudière est saturante, mais sèche.

Soit, par exemple, une machine dont la chaudière est à la température de 150° C. et fournit de la vapeur sèche, et dont le condenseur est à 50°. Dans ces limites de température, le coefficient économique maximum est

$$\frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{100}{273 + 150} = 0,236.$$

La formule (7) donne $S = 132E$. La quantité de chaleur fournie par le foyer est

$$Q_2 = C(T_2 - T_1) + L_2 = 602E.$$

Le coefficient économique est $\frac{132}{602} = 0,219$. L'imperfection du cycle le diminue de 0,017, ou de 7,2 pour 100.

106. *Détente incomplète.* — Dans ce qui précède, nous avons supposé la détente de la vapeur complète, depuis la température de 150° de la chaudière jusqu'à la température 50° du condenseur; dans ces conditions, le volume final de la vapeur, comme nous l'avons vu (n° 98), serait vingt-six fois le volume primitif. Dans la pratique, on est loin d'utiliser toute la détente; le volume final de la vapeur ne dépasse guère quatre fois le volume primitif; il résulte de là une nouvelle perte de travail.

Supposons donc qu'on arrête la détente au point F (*fig.* 28), à la température T'; la vapeur, ayant alors une tension p' supérieure à p_1, se précipite dans le condenseur; la perte de travail est figurée par l'aire FCG; c'est la portion du travail de la détente qui n'est pas utilisée. Désignons par v' le volume du mélange en F; d'après la formule (13) du n° 97, ce travail

perdu, diminué du travail de la pression p_1 qui s'exerce sur la face inférieure du piston, a pour valeur

$$L'x' - L_1x_1 + p_1v_1 - p'v' + \int_{T_1}^{T'} \left(m + u\frac{dp}{dT}\right) dT - p_1(v_1 - v');$$

en le retranchant de la quantité (4), on a

$$(8)\quad S = L_2x_2\frac{T_2 - T'}{T_2} + (p' - p_1)v' + \int_{T'}^{T_2} m\left(1 - \frac{T'}{T}\right)dT - \int_{p_1}^{p'} u\,dp,$$

et, approximativement,

$$(9)\quad S = L_2x_2\frac{T_2 - T'}{T_2} + (p' - p_1)(v' - u) + C(T_2 - T') - CT'\log\frac{T_2}{T'}.$$

Supposons que, dans la machine que nous avons prise comme exemple, la détente cesse à la température de 100°C.; le volume de la vapeur à la fin de la détente est quatre fois plus grand qu'au commencement; l'équation précédente donne $S = 99E$. La détente complète donnait $S = 132E$; la perte de travail due à l'imperfection de la détente est donc $33E$, c'est-à-dire un quart du travail que l'on obtiendrait avec la détente complète.

107. *Chemise à vapeur.* — Watt a imaginé d'entourer le corps de pompe d'un deuxième cylindre dans lequel passent les gaz du foyer, après avoir échauffé la chaudière et avant de se rendre dans la cheminée; ces gaz fournissent de la chaleur à la vapeur et empêchent la condensation qui a lieu habituellement pendant la détente. On évite ainsi la formation dans le corps de pompe de l'eau de condensation, qui gêne la marche du piston, et le rendement est augmenté sans qu'il soit nécessaire d'augmenter beaucoup la dépense de combustible. Supposons que les gaz du foyer maintiennent la vapeur à l'état de vapeur saturante sèche, et calculons le travail disponible dans ces conditions, quand la détente est complète.

Si l'on emploie un poids de vapeur de 1^{kg} pour chaque coup de piston, il faudra d'abord une quantité de chaleur égale

à $C(T_2 - T_1)$ pour élever l'eau de la température T_1 à la température T_2, puis la quantité L_2 pour la vaporiser à la température T_2, et enfin la quantité $\int_{T_2}^{T_1} m'\,dT$ pour maintenir la vapeur sèche de la température T_2 à la température T_1. La quantité totale de chaleur Q_2 fournie par le foyer est donc

$$Q_2 = \int_{T_1}^{T_2} C\,dT + L_2 + \int_{T_2}^{T_1} m'\,dT.$$

La vapeur arrive alors sèche au condenseur, et la quantité de chaleur qu'elle lui fournit est $Q_1 = L_1$. La quantité de chaleur transformée en travail est donc

$$Q_2 - Q_1 = L_2 - L_1 + \int_{T_1}^{T_2} C\,dT - \int_{T_1}^{T_2} (\quad m')\,dT.$$

Si l'on remplace C par m, comme nous l'avons fait jusqu'ici, le travail produit par 1kg de vapeur a pour valeur

$$S = L_2 - L_1 - \int_{T_1}^{T_2} (m' - m)\,dT.$$

On peut simplifier cette expression à l'aide de la relation (6) du n° 95; on en déduit

$$\int_{T_1}^{T_2} (m' - m)\,dT = \int_{T_1}^{T_2} T\,d\left(\frac{L}{T}\right) = L_2 - L_1 - \int_{T_1}^{T_2} \frac{L}{T}\,dT$$

et, par suite,

(10) $$S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{L}{T}\,dT.$$

On a, d'après les expériences de Regnault,

$$L = (606,50 - 0,695\,t)\,E = (796,25 - 0,695\,T)\,E,$$

d'où

$$\frac{L}{T} = \left(\frac{796,25}{T} - 0,695\right)E$$

et, en remplaçant dans la formule précédente,

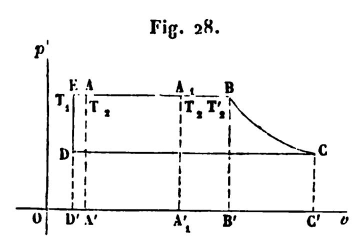
(11) $$S = \left[796,25 \log \frac{T_2}{T_1} - 0,695\,(T_2 - T_1)\right]E.$$

Si l'on applique cette formule à une machine fonctionnant avec une chaudière à 150° et un condenseur à 50°, on trouve $S = 144E$. La machine ordinaire, fonctionnant entre les mêmes limites de température (n° 105), donnait $132E$; la quantité de travail fournie par 1^{kg} de vapeur est augmentée de $12E$, soit à peu près du onzième de sa valeur primitive.

108. *Emploi de la vapeur surchauffée.* — Dans les machines qui précèdent, nous avons supposé que la vapeur était toujours saturante, en arrivant dans le corps de pompe et pendant la détente. Pour augmenter le coefficient économique, il faudrait porter la chaudière à une très haute température; mais la tension de la vapeur d'eau croît si rapidement quand la température s'élève, que l'on est bientôt arrêté par le défaut de résistance des chaudières. On évite cette difficulté en employant de la vapeur surchauffée: on peut alors élever la température sans augmenter outre mesure la tension de la vapeur. La vapeur, en sortant de la première chaudière, passe dans une deuxième chaudière, où elle est échauffée par les gaz qui ont déjà servi à chauffer la première; la pression de la vapeur ne change pas, parce que les deux chaudières restent constamment en communication. Cette vapeur surchauffée se rend dans le corps de pompe où elle travaille d'abord à pleine pression, puis elle se détend et se rend au condenseur.

Soit E (*fig.* 28) l'état de l'eau qui arrive dans la première

Fig. 28.



chaudière à la température T_1 du condenseur et sous la pression p_2; elle est d'abord échauffée, tout en restant liquide, jusqu'à la température T_2 et passe à l'état A en changeant très peu de volume; alors elle se transforme en vapeur saturante sèche à la même pression p_2 et arrive à l'état A_1. Ensuite la

vapeur passe dans la deuxième chaudière où les gaz du foyer l'échauffent sous pression constante jusqu'à la température T'_2, et l'amènent à l'état B. La quantité Q_2 de chaleur fournie par le foyer pendant ces trois transformations est

$$Q_2 = \int_{T_1}^{T_2} C\,dT + L_2 + \int_{T_2}^{T'_2} C'\,dT.$$

Enfin la vapeur se rend dans le corps de pompe et se détend, de la pression p_2 à la pression p_1 du condenseur, suivant la ligne isentropique BC. Quoique d'abord surchauffée, la vapeur devient bientôt saturante pendant la détente; elle se condense ensuite partiellement et se trouve au titre x_1 quand elle arrive au condenseur, où elle se liquéfie. L'eau est alors à l'état D et le jeu de la pompe alimentaire, qui la porte dans la chaudière, la ramène à l'état primitif E sous la pression p_2, suivant une ligne isentropique DE qui est sensiblement une droite parallèle à Op, puisque le changement de volume est très faible.

La chaleur versée sur le condenseur étant $Q_1 = L_1 x_1$, la chaleur transformée en travail est

$$Q_2 - Q_1 = L_2 - L_1 x_1 + \int_{T_1}^{T_2} C\,dT + \int_{T_2}^{T'_2} C'\,dT.$$

En écrivant que la variation de l'entropie sur le cycle fermé est nulle, on a l'équation

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{C}{T}\,dT + \frac{L_2}{T_2} + \int_{T_2}^{T'_2} \frac{C'}{T}\,dT - \frac{L_1 x_1}{T_1} = 0,$$

d'où

$$\frac{L_1 x_1}{T_1} = \frac{L_2}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{C}{T}\,dT + \int_{T_2}^{T'_2} \frac{C'}{T}\,dT,$$

et, par suite,

$$(12)\quad S = L_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} C\left(1 - \frac{T_1}{T}\right) dT + \int_{T_2}^{T'_2} C'\left(1 - \frac{T_1}{T}\right) dT.$$

En comparant cette formule à la formule (6), et remarquant que m est à peu près égal à C, on voit que, dans la machine à vapeur surchauffée, il y a, pour 1 kg de vapeur employée, une

augmentation de travail égale à

$$(13) \qquad \Delta S = \int_{T_2}^{T'_2} C'\left(1 - \frac{T_1}{T}\, dT\right).$$

Supposons que, la première chaudière étant à 150° et le condenseur à 50°, comme précédemment, la vapeur soit surchauffée jusqu'à 300° et que la détente soit complète. La chaleur spécifique C′ de la vapeur surchauffée est encore mal connue; nous la supposerons constante et égale à 0,4805. On trouve alors $x_1 = 0{,}771$, $\Delta S = 23E$. L'augmentation de la quantité de travail fournie par 1kg de vapeur est égale à peu près au sixième de sa valeur.

109. *Machine à deux liquides.* — Il est important, comme nous l'avons vu, pour le rendement de la machine, que les deux températures T_2 et T_1, entre lesquelles elle fonctionne, soient, l'une aussi élevée, l'autre aussi basse que possible, et que la vapeur opère sa détente complète de l'une à l'autre. Mais cette dernière condition exigerait que la machine eût des dimensions impossibles à réaliser. On a essayé de résoudre la difficulté en employant deux liquides très inégalement volatils, par exemple l'eau et l'éther. La machine est double; la vapeur d'eau, produite dans la chaudière par la chaleur du foyer à la température T_2, se rend dans un condenseur, qui est à une température T' intermédiaire entre T_2 et T_1; la chaleur dégagée dans ce condenseur sert ensuite à vaporiser l'éther; la vapeur d'éther, produite à la température T', pousse un second piston et se rend dans un second condenseur à la température T_1. Le premier condenseur joue ainsi le rôle de foyer pour la machine à éther. Or on peut choisir la température intermédiaire T', de manière à rendre possible la détente complète de la vapeur d'eau entre les températures T_2 et T' et celle de la vapeur d'éther de T' à T_1.

Au point de vue théorique, une machine à deux liquides se comporte exactement comme une machine à un seul liquide fonctionnant entre les mêmes limites de température T_2 et T_1.

Supposons, en effet, les machines parfaites, c'est-à-dire fonctionnant suivant des cycles de Carnot. Dans la première

machine, fonctionnant entre les températures T_2 et T', le foyer fournit une quantité de chaleur Q_2, dont une partie

$$Q_2 \frac{T_2 - T'}{T_2}$$

est transformée en travail; l'autre partie

$$Q_2 \frac{T'}{T_2} = Q'$$

se dégage dans le premier condenseur et fait marcher la seconde machine. Cette quantité de chaleur Q' se divise en deux parties : l'une

$$Q' \frac{T' - T_1}{T'}$$

est transformée en travail, l'autre

$$Q' \frac{T_1}{T'}$$

se dégage dans le deuxième condenseur et est définitivement perdue.

La quantité totale de chaleur transformée en travail est donc

$$Q_2 \frac{T_2 - T'}{T_2} + Q' \frac{T' - T_1}{T'} = Q_2 \frac{T_2 - T'}{T_2} + Q_2 \frac{T' - T_1}{T_2} = Q_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2}.$$

La chaleur perdue est

$$Q' \frac{T_1}{T'} = Q_2 \frac{T_1}{T_2}.$$

Les résultats sont exactement les mêmes que si l'on avait employé une machine unique fonctionnant suivant un cycle de Carnot entre les deux températures extrêmes T_2 et T_1 des deux machines accouplées.

CHAPITRE VII.

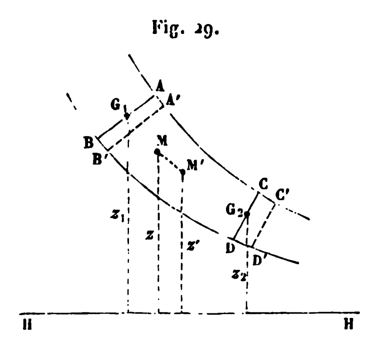
ÉCOULEMENT DES FLUIDES.

Principes généraux. — Écoulement des liquides. — Écoulement des gaz. — Écoulement des vapeurs. — Injecteur Giffard.

Principes généraux.

110. Proposons-nous d'étudier le mouvement d'un fluide dans un tube de section variable (*fig.* 29). Nous négligerons les frottements du fluide contre les parois du tube, ainsi que les frottements des filets fluides les uns contre les autres, et nous ad-

Fig. 29.



mettrons qu'une petite masse du fluide, outre ses mouvements intérieurs, est animée d'un simple mouvement de translation, sans rotation sur elle-même. Si l'on désigne par ϖ le poids d'une petite masse fluide, et par w sa vitesse de translation, son énergie totale sera $\frac{\varpi w^2}{2g} + \varpi U$, U étant l'énergie intérieure pour l'unité de poids. Nous supposerons que le mouvement se fait

par tranches normales à l'axe du tube, c'est-à-dire que les molécules situées dans un même plan normal ont des vitesses égales et parallèles à l'axe du tube; nous supposerons, en outre, que le mouvement s'accomplit sans gain ni perte de chaleur.

Considérons l'état des choses quand le mouvement régulier s'est établi. Appliquons le théorème des forces vives à la masse fluide comprise, au temps t, entre deux plans normaux AB, CD; au temps $t+dt$, cette masse occupera le volume compris entre les deux plans A'B', C'D', voisins des premiers. Si l'on compare la masse fluide dans ces deux positions, on remarque que les parties qui occupent dans les deux cas le volume A'C sont dans le même état et, par conséquent, ont la même énergie; la variation de l'énergie de la masse entière est donc la différence entre les énergies des masses égales CC' et AA', dont nous désignerons le poids par ϖ, c'est-à-dire

$$\varpi\left(\frac{w_2^2}{2g} + U_2\right) - \varpi\left(\frac{w_1^2}{2g} + U_1\right),$$

en appelant w_1 et w_2, U_1 et U_2 les vitesses et les énergies intérieures du fluide dans les tranches AB et CD. D'autre part, quand on néglige les frottements, les seules forces extérieures que l'on ait à considérer sont les pressions p_1 et p_2 exercées par le fluide extérieur sur les plans AB et CD et les poids des molécules du fluide. Si l'on désigne par v_1 et v_2 les volumes spécifiques du fluide dans les tranches AB et CD, les volumes AA' et CC' occupés par les poids ϖ de fluide seront ϖv_1 et ϖv_2, et le travail des pressions aura pour expression $\varpi p_1 v_1 - \varpi p_2 v_2$. Une molécule du fluide décrit, pendant le temps dt, une ligne telle que MM'. Si l'on représente par z et z' les hauteurs des points M et M' au-dessus d'un plan horizontal H, le travail du poids de cette molécule de masse m est $mg(z - z')$. La somme des travaux des poids de toutes les molécules est donc $\Sigma mg(z - z')$, ou $\Sigma mgz - \Sigma mgz'$, la première somme s'étendant au volume AC, la seconde au volume A'C'. Comme on peut faire abstraction de la partie commune A'C, cette différence est égale à la différence des moments des poids des tranches AA' et CC' par rapport au plan horizontal H, c'est-à-dire à $\varpi z_1 - \varpi z_2$, en appelant z_1 et z_2 les hauteurs des centres

de gravité G_1 et G_2 des sections AB et CD au-dessus du plan **H**. On obtient ainsi l'équation

$$\varpi\left(\frac{w_2^2}{2g}+U_2\right)-\varpi\left(\frac{w_1^2}{2g}+U_1\right)=\varpi p_1 v_1-\varpi p_2 v_2+\varpi z_1-\varpi z_2,$$

ou

$$(1)\qquad \frac{w_1^2}{2g}+U_1+p_1 v_1+z_1=\frac{w_2^2}{2g}+U_2+p_2 v_2+z_2.$$

On en conclut que la quantité

$$\frac{w^2}{2g}+U+pv+z$$

conserve la même valeur tout le long du tube.

111. Si le mouvement s'opère par masse continue, comme nous l'avons supposé, chaque partie du fluide peut être considérée comme enveloppée par une surface sur laquelle s'exerce la pression du fluide environnant, et le théorème des forces vives s'applique au mouvement de cette portion du fluide par rapport à des axes mobiles de directions constantes passant par son centre de gravité (nº 33). La variation $\varpi\, dU$ de son énergie intérieure, pendant un temps infiniment petit, est égale à la quantité de chaleur $\varpi\, dQ$ absorbée ou dégagée, plus le travail de la pression extérieure dans le mouvement relatif. Cette pression n'est pas absolument uniforme; elle est plus grande d'un côté que de l'autre; c'est là ce qui produit la variation de la vitesse du centre de gravité. Son travail dans le mouvement relatif, c'est-à-dire résultant du changement de volume de la petite masse fluide, est exprimé par la formule $-\varpi p\, dv$, p étant une valeur moyenne de la pression. On a donc l'équation

$$dU=dQ-p\, dv.$$

C'est l'équation fondamentale de la Thermodynamique, de laquelle nous avons déduit les lois générales de la transformation des corps. Il en résulte que la transformation intérieure de chaque portion du fluide s'accomplit suivant les mêmes lois, abstraction faite du mouvement de translation.

Toutefois, cette conséquence ne serait plus vraie, si, dans son mouvement, le fluide se divisait en portions très petites, séparées les unes des autres, ce qui arriverait, par exemple, s'il était obligé de passer par des trous très fins, ou, si les parties ayant des mouvements distincts étaient tellement petites que l'on ne puisse plus les considérer comme limitées par des surfaces continues.

Dans le cas actuel, comme nous supposons que la transformation s'opère sans gain ni perte de chaleur, on a $dQ = 0$, et l'équation fondamentale se réduit à $dU = -p\,dv$. On en déduit la variation d'énergie intérieure

$$(2) \qquad U_2 - U_1 = -\int_1^2 p\,dv,$$

l'intégrale se rapportant à une transformation isentropique.

Écoulement des liquides.

112. Dans les liquides, comme l'eau, la variation du volume spécifique étant très faible, la variation $U_2 - U_1$ de l'énergie intérieure donnée par l'équation (2) est sensiblement nulle, et l'équation (1) se réduit à

$$(3) \qquad \frac{w_1^2}{2g} + p_1 v + z_1 = \frac{w_2^2}{2g} + p_2 v + z_2.$$

C'est l'équation de Bernoulli, dont la loi de Torricelli est un cas particulier. Les vitesses w_1 et w_2 sont inversement proportionnelles aux aires des sections AB, CD. Lorsque l'axe du tube est horizontal, la quantité

$$\frac{w^2}{2g} + pv$$

reste constante; plus la vitesse est grande, plus la pression est petite.

Écoulement des gaz parfaits.

113. D'après la formule (13) du n° 84, la variation de l'énergie intérieure d'un gaz parfait est

$$U_2 - U_1 = C_v(T_2 - T_1);$$

on a d'autre part, d'après les formules (3) du n° **80** et (8) du n° **81**,

$$p_2 v_2 - p_1 v_1 = \alpha p_0 v_0 (T_2 - T_1) = (C_p - C_v)(T_2 - T_1);$$

on en déduit

$$(U_2 + p_2 v_2) - (U_1 + p_1 v_1) = C_p(T_2 - T_1),$$

et l'équation (1) devient

$$(4) \qquad \frac{w_1^2}{2g} + C_p T_1 + z_1 = \frac{w_2^2}{2g} + C_p T_2 + z_2.$$

On y joindra la relation

$$(5) \qquad T_1 p_1^{\frac{1}{\gamma}-1} = T_2 p_2^{\frac{1}{\gamma}-1},$$

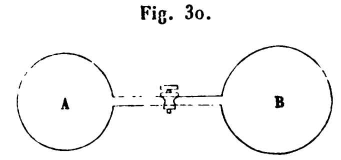
qui se rapporte aux transformations isentropiques des gaz (n° **85**).

Lorsque l'axe du tube est horizontal, plus la vitesse est grande, plus la température, la pression et la densité sont petites. Si l'on donne la température T_1, la pression p_1 et la vitesse w_1 à l'une des extrémités, ainsi que la pression p_2 à l'autre extrémité, on calculera d'abord T_2 à l'aide de l'équation (5), puis w_2 à l'aide de l'équation (4).

En appliquant ces formules à l'écoulement dans l'atmosphère, par un petit ajutage cylindrique, de l'air contenu dans un vase de grande dimension, à la température de 20° C., sous la pression de 2^{atm}, et négligeant le carré de la vitesse très petite w_1, on trouve $T_2 = 241$ ou $t_2 = -32°$, et $w_2 = 326^{\text{m}}$. L'écoulement s'opère avec une grande vitesse, et il est accompagné d'un grand abaissement de température.

114. Considérons deux vases A et B (*fig.* 30), communiquant

Fig. 30.



à l'aide d'un tube fermé par un robinet, et remplis d'un même

gaz dans des états différents. Étudions le phénomène qui se produit quand on ouvre le robinet.

Appelons V_1 le volume du ballon A, ϖ_1 le poids de gaz qu'il renferme d'abord, v_1 le volume spécifique de ce gaz, p_1 sa pression, T_1 sa température; appelons V_2, ϖ_2, v_2, p_2 les quantités analogues relatives au ballon B.

Supposons $p_1 > p_2$ et considérons l'état des choses au moment où un poids ϖ de gaz s'est écoulé du vase A dans le vase B. Le poids du gaz renfermé dans le ballon A est alors $\varpi_1 - \varpi$, et son état est caractérisé par les valeurs v'_1, p'_1, T'_1; le ballon B renferme un poids $\varpi_2 + \varpi$ de gaz, dont l'état est caractérisé par les valeurs v'_2, p'_2, T'_2. Toutes ces valeurs nouvelles sont des fonctions du poids ϖ de gaz écoulé; il s'agit de les déterminer.

On a d'abord

$$v_1 = \frac{V_1}{\varpi_1}, \qquad v'_1 = \frac{V_1}{\varpi_1 - \varpi}, \qquad \frac{v_1}{v'_1} = \frac{\varpi_1 - \varpi}{\varpi_1}$$

et, de même,

$$v_2 = \frac{V_2}{\varpi_2}, \qquad v'_2 = \frac{V_2}{\varpi_2 + \varpi}, \qquad \frac{v_2}{v'_2} = \frac{\varpi_2 + \varpi}{\varpi_2}.$$

Le poids $\varpi_1 - \varpi$ de gaz n'occupait d'abord qu'une partie du ballon A; cette masse de gaz s'est ensuite dilatée de manière à occuper le volume entier, sans communication de chaleur avec l'extérieur. Les quantités pv^γ, $Tv^{\gamma-1}$ conservant des valeurs constantes dans cette transformation isentropique (n° 85), on a

$$(6) \qquad \frac{p'_1}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v'_1}\right)^\gamma = \left(1 - \frac{\varpi}{\varpi_1}\right)^\gamma,$$

$$(7) \qquad \frac{T'_1}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v'_1}\right)^{\gamma-1} = \left(1 - \frac{\varpi}{\varpi_1}\right)^{\gamma-1}.$$

L'énergie de la masse entière du gaz contenue dans les deux ballons n'a pas changé pendant l'opération, puisqu'il n'y a pas eu de travail extérieur accompli; la formule (13) du n° 84 donne l'énergie d'un poids de gaz égal à 1^{kg}; on a donc l'équation

$$\begin{aligned} &\varpi_1[U_0 + C_v(T_1 - T_0)] + \varpi_2[U_0 + C_v(T_2 - T_0)] \\ &\quad = (\varpi_1 - \varpi)[U_0 + C_v(T'_1 - T_0)] + (\varpi_2 + \varpi)[U_0 + C_v(T'_2 - T_0)], \end{aligned}$$

ou, plus simplement,

$$\varpi_1 T_1 + \varpi_2 T_2 = (\varpi_1 - \varpi) T'_1 + (\varpi_2 + \varpi) T'_2.$$

En remplaçant T'_1 par sa valeur, on en déduit

$$(8)\qquad T'_2 = \frac{\varpi_2}{\varpi_2 + \varpi} T_2 + \frac{\varpi_1}{\varpi_2 + \varpi}\left[1 - \left(1 - \frac{\varpi}{\varpi_1}\right)^{\gamma}\right] T_1.$$

La relation

$$\frac{p_2 v_2}{p'_2 v_2} = \frac{T_2}{T'_2}$$

donne ensuite

$$(9)\qquad \frac{p'_2}{p_2} = 1 + \frac{\varpi_1 T_1}{\varpi_2 T_2}\left[1 - \left(1 - \frac{\varpi}{\varpi_1}\right)^{\gamma}\right].$$

On a ainsi l'état du gaz dans chacun des ballons à chaque instant, en fonction du poids ϖ de gaz qui s'est écoulé.

L'écoulement cesse quand les pressions p'_1 et p'_2 dans les deux ballons deviennent égales. En égalant ces deux pressions, on obtient l'équation

$$\left(1 - \frac{\varpi}{\varpi_1}\right)^{\gamma} = \frac{p_2(\varpi_1 T_1 + \varpi_2 T_2)}{p_2 \varpi_1 T_1 + p_1 \varpi_2 T_2},$$

ou, plus simplement,

$$(10)\qquad \left(1 - \frac{\varpi}{\varpi_1}\right)^{\gamma} = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{p_1(V_1 + V_2)}.$$

Les équations (6) et (7) deviennent

$$(11)\qquad p'_1 = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2},$$

$$(12)\qquad \frac{T'_1}{T_1} = \left[\frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{p_1(V_1 + V_2)}\right]^{1 - \frac{1}{\gamma}}.$$

Pour appliquer ces formules au cas où l'écoulement s'opère du vase A dans l'atmosphère, il suffit de supposer que le volume V_2 du vase B est infini. Les équations (10) et (12) se réduisent alors à

$$(13)\qquad \left(1 - \frac{\varpi}{\varpi_1}\right)^{\gamma} = \frac{p_2}{p_1},\quad \frac{T'_1}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1 - \frac{1}{\gamma}}.$$

Supposons, par exemple, que le volume du ballon A soit de 1^{mc} et qu'il renferme de l'air sec à la température de 30° C., sous la pression de 5^{atm}; le poids de l'air est de $5^{kg},8256$. L'écoulement cesse quand la pression dans le ballon est de 1^{atm}. On trouve que le poids de l'air écoulé est de $3^{kg},9886$ et la température finale de -94° C.

115. Si, le ballon A étant plein de gaz, le ballon B était vide, il suffirait de faire, dans les formules précédentes, $\varpi_2 = 0$ et $p_2 = 0$. L'équation (11), qui se réduit à

$$\left(1-\frac{\varpi}{\varpi_1}\right)^{\gamma} = \frac{V_1}{V_1+V_2}, \tag{14}$$

détermine le poids du gaz qui passe du premier ballon dans le second. On a ensuite, en vertu des équations (11), (12) et (8),

$$\frac{p'_1}{p_1} = \frac{V_1}{V_1+V_2}, \tag{15}$$

$$\frac{T'_1}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_1+V_2}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}, \tag{16}$$

$$\frac{T'_2}{T_1} = \frac{1-\frac{V_1}{V_1+V_2}}{1-\left(\frac{V_1}{V_1+V_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}. \tag{17}$$

La température finale T'_1 du ballon A est inférieure à sa température initiale T_1, et la température finale T'_2 du ballon B est au contraire supérieure à T_1.

116. Comme dernière application, supposons que le ballon B soit vide d'abord et qu'on le mette en communication avec l'atmosphère; il suffira de regarder le ballon A comme infiniment grand et de faire, dans les formules du numéro précédent, $\varpi_1 = \infty$, $V_1 = \infty$. Les équations (15) et (16) donnent $p'_1 = p_1$, $T'_1 = T_1$, résultats évidents *a priori*. De l'équation (14), on déduit

$$1-\frac{\varpi}{\varpi_1} = \left(\frac{V_1}{V_1+V_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(1-\frac{V_2}{V_1+V_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

et, en développant le second membre en série,

$$1 - \frac{\varpi}{\varpi_1} = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{V_2}{V_1+V_2} - \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\left(\frac{V_2}{V_1+V_2}\right)^2 + \ldots,$$

$$\varpi = \frac{1}{\gamma}\frac{\varpi_1 V_2}{V_1+V_2} + \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\frac{\varpi_1 V_2^2}{(V_1+V_2)^2} + \ldots;$$

si l'on remarque que $V_1 = v_1\varpi_1$, et si l'on fait $\varpi_1 = \infty$, cette équation se réduit à

$$\varpi = \frac{1}{\gamma}\frac{V_2}{v_1}. \tag{18}$$

L'équation (17), à l'aide du même développement, devient

$$\frac{T'_2}{T_1} = \frac{\dfrac{V_2}{V_1+V_2}}{\dfrac{1}{\gamma}\dfrac{V_2}{V_1+V_2} + \dfrac{\gamma-1}{2\gamma^2}\left(\dfrac{V_2}{V_1+V_2}\right)^2 + \ldots},$$

$$\frac{T'_2}{T_1} = \frac{\gamma}{1 + \dfrac{\gamma-1}{2\gamma}\dfrac{V_2}{V_1+V_2} + \ldots},$$

et se réduit à

$$\frac{T'_2}{T_1} = \gamma. \tag{19}$$

Si la température de l'atmosphère était de 20° C., ce qui fait $T_1 = 273 + 20 = 293$, on aurait, d'après l'équation précédente, $T'_2 = 408$, ou $t_2 = 135°$. Ainsi la rentrée brusque de l'air produit une grande élévation de température.

117. Cette dernière expérience donne un moyen très simple de déterminer le rapport γ des chaleurs spécifiques; car on a $\gamma = \frac{T'_2}{T_1}$. Mais, comme la température T'_2 est difficile à observer avec précision, on préfère recourir à une mesure de pression. Si l'on ferme le robinet aussitôt après la rentrée du gaz, on enferme dans le vase B un poids ϖ d'air à la température T'_2 et sous la pression atmosphérique p_1; si on laisse ensuite refroidir cet air jusqu'à la température T_1 de l'air ambiant, sa pres-

sion s'abaissera à une pression p' satisfaisant à la relation $\frac{p_1}{p'} = \frac{T'_2}{T_1}$, puisque le volume est constant; on a ainsi $\gamma = \frac{p_1}{p'}$.

Écoulement des vapeurs.

118. Nous considérerons le cas où le fluide en mouvement est un mélange de liquide et de vapeur, dans les tranches AB, CD (*fig.* 30), sous une pression égale à la pression normale de la vapeur saturante. Soient x_1 et x_2 les titres du mélange dans ces deux tranches. La variation de l'énergie intérieure du mélange est donnée par la formule (12) du n° 97, savoir :

$$U_2 - U_1 = (L_2 x_2 - L_1 x_1) - (p_2 v_2 - p_1 v_1) + \int_{T_1}^{T_2} \left(m + u\frac{dp}{dT}\right) dT.$$

L'équation (1), établie au n° 110 pour le mouvement des fluides quelconques, devient ainsi

$$(20) \quad \frac{w_1^2}{2g} + L_1 x_1 + z_1 = \frac{w_2^2}{2g} + L_2 x_2 + z_2 + \int_{T_1}^{T_2} \left(m + u\frac{dp}{dT}\right) dT.$$

D'autre part, la transformation s'effectuant sans gain ni perte de chaleur, on a, d'après la formule (10) du n° 96,

$$(21) \quad \frac{L_2 x_2}{T_2} = \frac{L_1 x_1}{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{T} dT.$$

Si l'on donne l'état du fluide à l'une des extrémités du tube, c'est-à-dire x_1, T_1 et la vitesse w_1, ainsi que la pression p_2 et par conséquent la température correspondante T_2 à l'autre extrémité, l'équation (21) déterminera x_2 et ensuite l'équation (20) permettra de calculer la vitesse de sortie w_2.

En remplaçant m par C et remarquant que le volume spécifique u du liquide est à peu près constant, on a les formules approchées

$$(22) \quad \frac{w_1^2}{2g} + L_1 x_1 + up_1 + CT_1 + z_1 = \frac{w_2^2}{2g} + L_2 x_2 + up_2 + CT_2 + z_2,$$

$$(23) \quad \frac{L_2 x_2}{T_2} = \frac{L_1 x_1}{T_1} + C \log\frac{T_1}{T_2}.$$

Pour montrer une application de ces formules, supposons qu'un vase de grandes dimensions contienne de la vapeur saturante sèche à la température de 152°C., sous la pression normale de 5^{atm}, et que cette vapeur s'écoule dans l'atmosphère par un ajutage mince et allongé. Nous négligerons le carré de la vitesse très petite w_1 et la différence de niveau $z_1 - z_2$; la pression p_2 à la sortie du tube étant de 1^{atm}, la température correspondante est $t_2 = 100°$. En adoptant les chaleurs latentes $L_2 = 536E$, $L_1 = 499E$ données par les Tables d'expériences de Regnault, on trouve

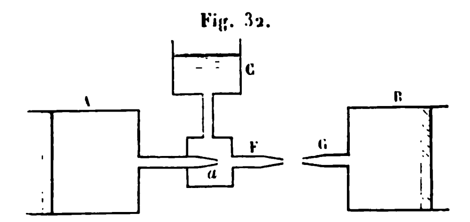
$$x_2 = 0,91, \quad w_2 = 734^m.$$

Il y a eu condensation partielle; la vapeur, qui était primitivement sèche, sort à l'état de mélange, avec une grande vitesse.

Injecteur Giffard.

119. L'injecteur imaginé par Giffard est destiné à remplacer la pompe alimentaire dans les machines à vapeur; un jet de vapeur, sortant de la chaudière, aspire l'eau alimentaire et la fait pénétrer dans la chaudière elle-même. Pour bien faire comprendre le jeu de cet appareil ingénieux, considérons un cylindre A (*fig.* 32), muni d'un piston et renfermant de la

Fig. 32.



vapeur au titre x_1, à la température T_1, sous la pression p_1. Cette vapeur s'écoule par un tube a et rencontre de l'eau froide qui vient d'un vase C, où elle est à la pression atmosphérique p_0 et à la température T'_0. La vapeur se condense au contact de l'eau froide; la chaleur dégagée par la condensation se transforme en force vive de translation et le jet liquide sort dans l'air par le tube F avec une grande vitesse. Il pénètre alors dans le tube G qui communique avec un deuxième cylindre B

i d'un piston et s'arrête dans ce cylindre à la tempéra- T_2 et à la pression p_2, que nous supposons égale à la pres- normale de la vapeur saturante à cette température T_2.
pelons U_1 l'énergie intérieure du mélange compris dans se A, U_2 et U_0 celles des liquides situés dans les vases B pour l'unité de poids; désignons par ϖ_1 le poids du mé- e qui sort du vase A en une seconde, et par ϖ_0 le poids 1 froide qu'il entraîne. Appliquons le théorème des forces à la masse entière, en négligeant les carrés des vitesses pistons et de la surface libre dans le vase C. La variation énergie de cette masse en une seconde est

$$(\varpi_1 + \varpi_0) U_2 - \varpi_1 U_1 - \varpi_0 U_0.$$

s travaux des pressions exercées par les pistons A et B, ès le raisonnement du n° 110, sont

$$\varpi_1 p_1 v_1 \quad \text{et} \quad -(\varpi_1 + \varpi_0) p_2 v_2;$$

ivail de la pression atmosphérique qui s'exerce sur la sur- du liquide contenu dans le vase C est $\varpi_0 p_0 v_0$; il faut y lre le travail $\varpi_0 h$ du poids ϖ_0 qui descend de la hauteur h tte surface au-dessus du tube d'écoulement F. On a donc ation

$$(\varpi_1 + \varpi_0) U_2 - \varpi_1 U_1 - \varpi_0 U_0$$
$$= \varpi_1 p_1 v_1 - (\varpi_1 + \varpi_0) p_2 v_2 + \varpi_0 p_0 v_0 + \varpi_0 h,$$

$$\frac{\varpi_0}{\varpi_1} = \frac{U_1 - U_2 + p_1 v_1 - p_2 v_2}{U_2 - U_0 + p_2 v_2 - p_0 v_0 - h}.$$

ıprès l'équation (12) du n° 97, puisque $x_2 = 0$, on a

$$U_1 - U_2 + p_1 v_1 - p_2 v_2 = L_1 x_1 - \int_{T_1}^{T_2} \left(m + u \frac{dp}{dT}\right) dT.$$

it T_0 la température normale d'ébullition sous la pres- p_0; la quantité de chaleur nécessaire pour porter 1kg d'eau température T'_0 à la température T_0, sous la pression con-

stante p_0, et pour l'amener ensuite à la température T_2 sur la ligne $\mathfrak{L}$, est

$$Q = \int_{T'_0}^{T_0} C_p \, dT + \int_{T_0}^{T_2} m \, dT;$$

le travail accompli dans cette transformation est

$$S = p_0(u_0 - v_0) + \int_{T_0}^{T_2} p \, du = p_2 v_2 - p_0 v_0 - \int_{T_0}^{T_2} u \frac{dp}{dT} dT.$$

On en déduit, d'après la relation $\Delta U = Q - S$,

$$U_2 - U_0 + p_2 v_2 - p_0 v_0 = \int_{T'_0}^{T_0} C_p \, dT + \int_{T_0}^{T_2} \left(m + u \frac{dp}{dT}\right) dT.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (24), on obtient l'expression

$$(25) \qquad \frac{\varpi_0}{\varpi_1} = \frac{L_1 x_1 - \int_{T_1}^{T_2} \left(m + u \frac{dp}{dT}\right) dT}{\int_{T'_0}^{T_0} C_p \, dT + \int_{T_0}^{T_2} \left(m + u \frac{dp}{dT}\right) dT - h}.$$

Dans la pratique, les deux cylindres A et B sont deux parties de la même chaudière et le réservoir C est situé au-dessous du tube d'écoulement. Si l'on remplace h par $-h'$ et si l'on fait $p_2 = p_1$, $T_2 = T_1$, $x_1 = 1$, l'expression précédente devient

$$(26) \qquad \frac{\varpi_0}{\varpi_1} = \frac{L_1}{\int_{T'_0}^{T_0} C_p \, dT + \int_{T_0}^{T_1} \left(m + u \frac{dp}{dT}\right) dT + h'}.$$

La quantité m différant très peu de la chaleur spécifique C_p à pression constante et le volume u du liquide étant à peu près constant, cette expression se réduit approximativement à

$$(27) \qquad \frac{\varpi_0}{\varpi_1} = \frac{L_1}{C_p(T_1 - T'_0) + u(p_1 - p_0) + h'}.$$

Le jet de vapeur qui sort de la chaudière produit l'effet

d'une pompe aspirante et foulante; il soulève l'eau du réservoir à la hauteur h' et la refoule ensuite dans la chaudière.

Il est facile de calculer la vitesse w du jet liquide à l'entrée du tube G. La force vive $\frac{w^2}{2g}$ de l'unité de poids accomplissant le travail $(p_2 - p_0)u$, ou $(p_1 - p_0)u$, puisqu'on suppose $p_2 = p_1$, on a

$$\frac{w^2}{2g} = (p_1 - p_0)u. \tag{28}$$

CHAPITRE VIII.

THÉORIE MÉCANIQUE DES GAZ.

Hypothèse fondamentale. — Explication de la pression. — Transformation du travail en chaleur ou inversement. — Vitesse de translation des molécules. — Énergie totale d'un gaz. — Lois de combinaison des gaz. — Conséquences de la loi générale. — État solide. — Vaporisation.

Hypothèse fondamentale.

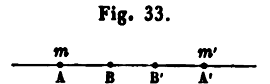
120. L'hypothèse fondamentale qui sert de base à la théorie des gaz consiste à admettre que les molécules d'un corps à l'état gazeux n'ont pas d'action sensible les unes sur les autres. Cette hypothèse est une conséquence de l'expérience par laquelle M. Joule a démontré que le travail intérieur dans les gaz est sensiblement nul (n° 78).

Au lieu de supposer que les molécules des gaz oscillent autour de leurs positions d'équilibre, comme dans les corps solides, on admet qu'elles sont animées de mouvements de translation très rapides dans toutes les directions, mouvements rectilignes et uniformes. Les molécules d'un gaz sont en général à des distances telles les unes des autres, que les forces moléculaires sont négligeables, excepté à de certains intervalles et pendant des temps relativement très courts, où, dans leur marche, deux molécules passent très près l'une de l'autre; pendant cet intervalle de temps, la force moléculaire s'exerce d'une manière énergique, et les mouvements sont modifiés; il y a, comme on dit, choc des deux molécules.

Considérons d'abord deux molécules égales m et m' (*fig.* 33), marchant en sens contraires sur une même droite, avec la vitesse u. Quand les molécules sont à une distance très petite AA′, la force moléculaire commence à agir d'une manière efficace; s'il y a d'abord attraction, puis répulsion quand la

distance devient moindre que la distance d'équilibre (n° 2), la vitesse commence par augmenter, puis elle diminue et devient nulle à la distance BB'; les molécules s'éloignent ensuite l'une de l'autre et reprennent leur vitesse primitive u à

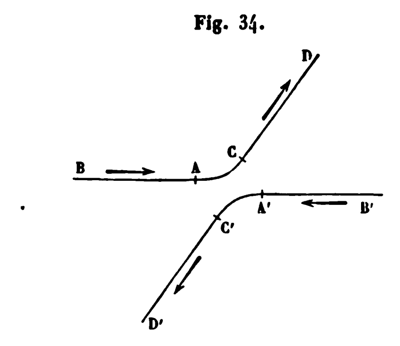
Fig. 33.



la distance AA', mais en sens inverse. Les molécules ont ainsi échangé leurs vitesses, et tout se passe comme si elles s'étaient traversées sans action réciproque.

Considérons maintenant deux molécules marchant suivant des droites différentes BA, B'A', et passant très près l'une de l'autre; l'action réciproque devient sensible à partir de la position AA' (*fig.* 34); chaque molécule décrit alors une petite

Fig. 34.



courbe et s'échappe ensuite suivant une autre ligne droite. La somme des forces vives des deux molécules varie pendant le choc, mais elle reprend à la fin sa valeur primitive. Comme il y a des molécules qui se meuvent dans tous les sens, il est clair, d'après cela, que l'état général du système n'est pas changé.

En résumé, la trajectoire de chaque molécule est formée d'une série de lignes droites disposées en zigzag, et réunies les unes aux autres par des courbes de raccordement très petites par rapport aux portions rectilignes.

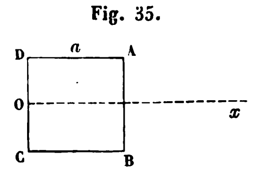
Explication de la pression.

121. Dans cette manière d'envisager les gaz, la pression qu'un gaz exerce contre la paroi du vase qui le contient est due aux chocs répétés des molécules contre la paroi. Quand une molécule du gaz arrive dans le voisinage de la paroi, des forces répulsives s'exercent entre cette molécule et celles de la paroi; elles détruisent bientôt la vitesse normale de la molécule du gaz, et lui impriment une vitesse égale et contraire. A cause de la multiplicité des chocs, l'ensemble produit l'effet d'une pression continue.

On trouve la première idée de cette hypothèse sur la constitution des gaz dans l'*Hydrodynamique* de J. Bernoulli, publiée en 1738; elle a été reprise par Krönig, de Berlin, en 1856, et développée par M. Clausius.

Voici comment Krönig explique la pression. Considérons une certaine masse de gaz renfermée dans un petit cube ABCD, dont l'arête est a (*fig.* 35); soit n le nombre des mo-

Fig. 35.



lécules du gaz. Krönig imagine toutes les molécules partagées en trois groupes de $\frac{n}{3}$ molécules, se mouvant parallèlement aux arêtes avec une même vitesse u; la pression exercée sur la face AB, que l'on supposera formée par un piston mobile, sera produite par le choc des $\frac{n}{3}$ molécules, dont la vitesse est normale à cette face.

Soit m la masse d'une molécule du gaz, animée d'une vitesse u parallèle à la droite Ox et dans le sens Ox; cette molécule vient choquer le piston AB, dont la masse M est très grande par rapport à la masse m de la molécule de gaz, et rebondit avec une vitesse égale et contraire $-u$. Le piston, dont

la vitesse était nulle avant le choc, acquiert après le choc une vitesse très petite u'.

Si l'on considère le système formé par le piston M et la molécule m, on sait (n° 11) que les actions réciproques qui s'exercent entre la molécule m et les molécules du piston ne changent pas la somme des quantités de mouvement du système. Cette somme, avant le choc, était $+mu$; après le choc, elle est $-mu+Mu'$; ces deux quantités étant égales, on a

$$mu = -mu + Mu',$$

d'où

$$Mu' = 2mu.$$

Ainsi chaque choc communique au piston une quantité de mouvement égale à $2mu$. Si l'on désigne par N le nombre des chocs pendant un temps très petit θ, la quantité de mouvement communiquée au piston pendant ce temps θ sera $2mu \times N$. Appelons F une force constante appliquée au piston en sens inverse et capable de le maintenir immobile; la quantité de mouvement communiquée au piston par la force F pendant le temps θ étant égale à $F\theta$, le piston aura une quantité de mouvement nulle et, par conséquent, restera immobile, si l'on a

$$F\theta = 2mu \times N.$$

On en déduit

$$F = \frac{2mu \times N}{\theta}.$$

Il est aisé d'évaluer le nombre des chocs : après le premier choc contre la face AB, la molécule m, marchant en sens contraire, vient choquer la face opposée CD, reprend sa vitesse primitive, choque de nouveau la face AB, et ainsi de suite. L'intervalle de temps qui s'écoule entre deux chocs consécutifs d'une molécule contre la face AB étant égal à $\frac{2a}{u}$, le nombre des chocs d'une même molécule contre cette face pendant le temps θ est $\frac{\theta u}{2a}$; le nombre N des chocs produits par le système des $\frac{n}{3}$ molécules dont la vitesse est normale à

la face AB est $N = \frac{\theta u}{2a} \times \frac{n}{3}$, et l'équation précédente devient

$$F = \frac{nmu^2}{3a}. \tag{1}$$

Si l'on appelle p la pression par mètre carré, on a

$$p = \frac{F}{a^2} = \frac{nmu^2}{3a^3},$$

et par suite

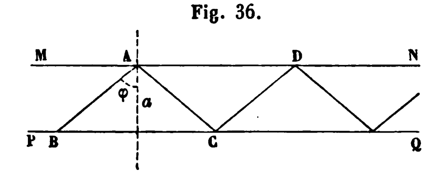
$$pv = \frac{nmu^2}{3} = \frac{2}{3}\,\frac{nmu^2}{2}, \tag{2}$$

v étant le volume du cube.

122. M. Clausius est arrivé au même résultat sans partager les molécules en trois groupes marchant dans trois directions perpendiculaires entre elles.

Considérons le volume de gaz compris entre deux plans parallèles MN et PQ (*fig.* 36), très voisins et très étendus, le premier formé par un piston mobile, le second fixe. Suppo-

Fig. 36.



sons qu'il y ait entre ces deux plans n molécules marchant dans toutes les directions. Une molécule, se mouvant dans la direction BA, choque le piston MN au point A, se réfléchit sur le plan PQ en C, pour venir choquer de nouveau le piston MN en D, et ainsi de suite. Appelons a la distance des deux plans, et φ l'angle que fait la droite AB avec la normale au plan. Le chemin parcouru par cette molécule entre deux chocs consécutifs contre le piston MN est $\frac{2a}{\cos\varphi}$, et l'intervalle de temps entre les deux chocs $\frac{2a}{u\cos\varphi}$, de sorte que le nombre des chocs de la molécule pendant le temps θ est $\frac{\theta u \cos\varphi}{2a}$.

Décomposons la vitesse u de la molécule m de gaz en deux, l'une $u\cos\varphi$, normale au plan, l'autre $u\sin\varphi$ parallèle au plan; la résultante des forces qui s'exercent entre la molécule m et les molécules du piston, étant normale au plan, ne modifie pas cette seconde composante, et les choses se passent comme si la molécule m arrivait normalement avec la vitesse $u\cos\varphi$; on en conclut (n° 121) que chaque choc communique au piston une quantité de mouvement égale à $2mu\cos\varphi$. Les chocs de la même molécule pendant le temps θ communiquent donc au piston une quantité de mouvement égale à $\frac{mu^2\cos^2\varphi}{a}\theta$. Si l'on désigne par $\sum\frac{mu^2\cos^2\varphi}{a}\theta$ la somme des quantités de mouvement provenant des chocs de toutes les molécules et par F une force normale capable de maintenir le piston immobile, on aura

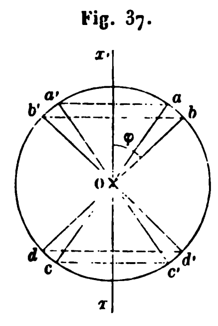
$$F\theta = \sum\frac{mu^2\cos^2\varphi}{a}\theta,$$

d'où

$$F = \sum\frac{mu^2\cos^2\varphi}{a}. \tag{3}$$

Pour évaluer cette somme, M. Clausius suppose que toutes les molécules ont la même masse et la même vitesse, et se meuvent indifféremment dans tous les sens. D'un point quel-

Fig. 37.



conque comme centre décrivons une sphère avec un rayon égal à l'unité (*fig.* 37); menons des rayons parallèles aux directions de toutes les vitesses; ces rayons couperont la sur-

face en une infinité de points régulièrement distribués sur la sphère. Toutes les vitesses dont les directions font, avec la normale xx' aux deux plans, des angles compris entre φ et $\varphi + d\varphi$, couperont la sphère sur les zones opposées $aba'b'$, $cdc'd'$, comprises entre deux cônes circulaires menés du centre de la sphère autour de la droite xx' et ayant pour demi-angles au sommet φ et $\varphi + d\varphi$. Comme il y a n molécules entre les deux plans, le nombre total de points déterminés sur la sphère sera aussi n, et le rapport du nombre n' des molécules qui correspondent à ces deux zones au nombre total n est égal au rapport de la surface des deux zones à celle de la sphère; on a donc

$$\frac{n'}{n} = \frac{2.2\pi \sin\varphi\, d\varphi}{4\pi} = \sin\varphi\, d\varphi.$$

Chacune de ces n' molécules introduisant dans la somme (3) un terme

$$\frac{mu^2 \cos^2\varphi}{a},$$

les n' molécules donneront

$$n' \frac{mu^2 \cos^2\varphi}{a} = \frac{mu^2 \cos^2\varphi}{a} n \sin\varphi\, d\varphi.$$

Pour obtenir l'action de toutes les molécules qui correspondent à la surface entière de la sphère, il suffit d'intégrer cette expression entre les limites zéro et $\frac{\pi}{2}$; l'équation (3) devient alors

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{mu^2 \cos^2\varphi}{a} n \sin\varphi\, d\varphi = \frac{nmu^2}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin\varphi\, d\varphi.$$

Or

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin\varphi\, d\varphi = \left(-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3};$$

on a donc

$$F = \frac{nmu^2}{3a}.$$

En appelant ω la surface de chacun des plans et v le volume

du gaz qu'ils renferment, la pression par mètre carré est

$$p = \frac{F}{\omega} = \frac{nmu^2}{3a\omega};$$

et l'on retrouve la relation (2),

$$pv = \frac{nmu^2}{3}.$$

123. On a supposé dans cette démonstration que les molécules ont des masses égales, ce qui n'a pas lieu pour un mélange de gaz, et que toutes les vitesses sont égales, hypothèse qui n'est nullement justifiée; mais on peut modifier la démonstration de M. Clausius de manière à s'affranchir de ces hypothèses.

En effet, on a toujours l'équation

$$(3) \qquad F = \sum \frac{mu^2 \cos^2 \varphi}{a}.$$

Pour évaluer la somme des termes qui forment le second membre, nous ferons intervenir les forces vives des molécules, au lieu de leur nombre. La force vive d'une molécule est $\frac{mu^2}{2}$. La somme des forces vives des molécules dont les vitesses correspondent aux zones déterminées par les angles φ et $\varphi + d\varphi$ est à la somme des forces vives de toutes les molécules dans le rapport de la surface des deux zones à la surface totale de la sphère; si l'on désigne par V'_u la première somme et par V_u la seconde, on a

$$\frac{V'_u}{V_u} = \frac{2.2\pi \sin\varphi\, d\varphi}{4\pi} = \sin\varphi\, d\varphi$$

ou

$$V'_u = V_u \times \sin\varphi\, d\varphi.$$

Les vitesses contenues dans la première somme font sensiblement le même angle φ avec la normale; si l'on multiplie chacun des termes de cette somme par le facteur constant $\frac{2}{a}\cos^2\varphi$, on a

$$V'_u \times \frac{2}{a}\cos^2\varphi = V_u \times \frac{2}{a}\cos^2\varphi \sin\varphi\, d\varphi.$$

Telle est la partie introduite dans l'expression de F par les molécules dont les vitesses correspondent aux deux zones considérées; pour avoir la somme entière, il faut intégrer cette expression de zéro à $\frac{\pi}{2}$, ce qui donne

$$F = \frac{2}{a} V_u \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi$$

ou

$$F = \frac{2}{3a} V_u;$$

on en déduit la relation générale

$$(4) \qquad pv = \frac{2}{3} V_u = \frac{2}{3} \sum \frac{mu^2}{2}.$$

On conclut de là que *le produit du volume d'une masse de gaz par la pression qu'elle supporte est égal aux $\frac{2}{3}$ de l'énergie du mouvement de translation de toutes les molécules.*

Dans cette démonstration, nous avons suivi le mouvement de chaque molécule, sans tenir compte des chocs qui se produisent entre les molécules; comme nous l'avons remarqué au n° 120, les chocs des molécules entre elles ne changent pas la force vive ni l'état général du système; mais ils peuvent modifier le nombre des chocs contre les parois. Nous négligeons pour le moment cette modification.

124. La relation (4) entre le volume et la pression s'applique, soit à un gaz homogène, c'est-à-dire à un gaz dont les molécules ont la même masse, mais des vitesses différentes, soit à un mélange de plusieurs gaz. Dans le premier cas, en désignant par n le nombre des molécules du gaz, nous appellerons *vitesse moyenne* une vitesse u_1, telle que l'on ait

$$\frac{nmu_1^2}{2} = \sum \frac{mu^2}{2}.$$

Dans le second cas, la masse moyenne des molécules étant $m_1 = \frac{\Sigma m}{n}$, nous définirons la vitesse moyenne en imaginant

un gaz homogène formé de n molécules de même masse m_1 et animées d'une même vitesse u_1, telle que l'énergie totale $\frac{nm_1 u_1^2}{2}$ soit égale à l'énergie V_u du gaz considéré; de cette manière, la relation (4) est ramenée à la forme (2), savoir

$$(5) \qquad pv = \frac{nm_1 u_1^2}{3}.$$

125. La loi du mélange des gaz est une conséquence immédiate de la relation (4). Appelons V'_u et V''_u les énergies du mouvement de translation des molécules de deux gaz, et supposons qu'on les mélange sans travail extérieur. Lorsque les gaz n'exercent pas l'un sur l'autre d'action chimique, l'énergie V_u du mélange est égale à la somme des énergies V'_u et V''_u des gaz mélangés. Si le premier occupait seul le volume v du mélange, il exercerait une pression p' donnée par l'équation

$$p'v = \frac{2}{3} V'_u.$$

Si le second gaz occupait seul le même volume, il exercerait aussi une pression p'' donnée par l'équation

$$p''v = \frac{2}{3} V''_u.$$

Or, en appelant p la pression exercée par le mélange, on a

$$pv = \frac{2}{3} V_u = \frac{2}{3}(V'_u + V''_u);$$

on en déduit

$$p = p' + p''.$$

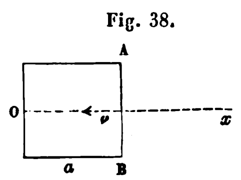
Ainsi la pression exercée par le mélange de plusieurs gaz est égale à la somme des pressions qu'exerceraient les gaz mélangés, si chacun d'eux occupait seul le volume du mélange.

Transformation du travail en chaleur, ou inversement.

126. On peut se rendre compte de la manière dont le travail extérieur se transforme en chaleur, c'est-à-dire augmente la force vive d'un gaz, ou inversement.

Considérons, en effet, une certaine masse de gaz remplissant un cube dont les arêtes sont égales à a, et dont une des parois AB (*fig.* 38) est formée par un piston mobile, auquel est appliquée une force $F = \frac{nmu^2}{3a}$ égale à la pression que le gaz exerce contre le piston (n° 122), et supposons que le piston s'enfonce avec une vitesse v très petite par rapport à u; le travail extérieur effectué par la force F dans le temps très petit θ est $Fv\theta$.

Fig. 38.



Pour calculer l'accroissement d'énergie communiquée au gaz, nous reprendrons, pour simplifier, le raisonnement de Krönig. Imaginons les molécules disposées en trois groupes et se mouvant parallèlement aux arêtes d'un cube. Pour étudier le choc d'une molécule contre le piston, concevons que l'on imprime à la molécule et au piston une vitesse commune v égale et contraire à celle du piston; alors le piston restera immobile; une molécule vient le choquer avec une vitesse relative $u+v$ et rebondit avec une vitesse relative $-(u+v)$; comme le piston est animé de la vitesse $-v$, la vitesse absolue de la molécule après le choc est $-(u+2v)$: l'accroissement de sa force vive est $\frac{m(u+2v)^2}{2} - \frac{mu^2}{2}$, approximativement $2muv$. Le nombre des chocs pour chaque molécule étant à peu près égal à $\frac{u\theta}{2a}$ dans le temps θ, l'accroissement de force vive pendant ce temps est $\frac{mu^2v\theta}{a}$ pour chaque molécule, soit $\frac{nmu^2v\theta}{3a}$ pour les $\frac{n}{3}$ molécules; on reconnaît que cette quantité est égale au travail de la force F.

Inversement, si le piston s'éloigne, il y a diminution de force vive après le choc, et transformation d'une partie de la force vive du gaz en travail extérieur.

Vitesse de translation des molécules.

127. En comparant la relation théorique

$$pv = \frac{2}{3} V_u,$$

que nous venons de trouver, à la relation

$$pv = \alpha p_0 v_0 T,$$

que l'on déduit des lois expérimentales (nº **80**), on obtient l'équation

$$V_u = \frac{3}{2} \alpha p_0 v_0 T. \tag{6}$$

Ainsi *la force vive du mouvement de translation des molécules d'un gaz est proportionnelle à la température absolue.*

Si l'on désigne par m_1 la masse moyenne des molécules et par u_1 leur vitesse moyenne, on a

$$n m_1 u_1^2 = 3 \alpha p_0 v_0 T,$$

et, en considérant une masse de gaz pesant un kilogramme,

$$u_1^2 = 3 g \alpha p_0 v_0 T. \tag{7}$$

Cette équation donne la vitesse moyenne à la température T.

Comme on a

$$\alpha = \frac{1}{273}, \quad p_0 = 10333, \quad g = 9,8096, \quad v_0 = \frac{0,7733}{\rho},$$

ρ étant la densité du gaz par rapport à l'air, on en déduit

$$u_1 = 485 \sqrt{\frac{T}{273 \rho}}. \tag{8}$$

A la température $t = 0$ ou $T_0 = 273$, la vitesse moyenne est de 485^m par seconde pour l'air, 461 pour l'oxygène, 492 pour l'azote, 1848 pour l'hydrogène.

128. A mesure que les molécules d'air s'élèvent au-dessus de la surface de la Terre, leurs vitesses, par l'action de la pe-

santeur, diminuent. Une molécule m lancée avec une vitesse u, faisant un angle φ avec la verticale, décrit une parabole dont le sommet est à une hauteur $h = \frac{u^2 \cos^2\varphi}{2g}$, en négligeant la diminution de la pesanteur; à la hauteur z égale ou inférieure à h, la force vive de la molécule est égale à $\frac{mu^2}{2} - mgz$. Si toutes les molécules d'air avaient la même masse et la même vitesse à la surface de la Terre, la force vive de chacune d'elles étant diminuée de la même quantité mgz, la température s'abaisserait en progression arithmétique; la densité diminuerait suivant une loi analogue. Pour qu'une molécule s'élève à la hauteur z, il faut que sa vitesse fasse avec la verticale un angle inférieur ou égal à l'angle α donné par la formule

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2gz}}{u}.$$

En désignant par n et n' les nombres de molécules contenues dans des tranches infiniment minces à la surface du sol et à la hauteur z, on trouverait, en raisonnant comme au n° 124,

$$\frac{n'}{n} = 1 - \cos\alpha = 1 - \frac{\sqrt{2gz}}{u},$$

ce qui donnerait une certaine loi pour la diminution de la densité. Les molécules qui s'élèvent le plus haut sont celles dont la vitesse est verticale; on obtiendrait ainsi la hauteur maximum

$$h = \frac{u^2}{2g}, \quad \text{ou} \quad h = \frac{3}{2}\alpha v_0 p_0 \mathrm{T},$$

en vertu de la formule (7), soit environ $12\,000^{\mathrm{m}}$, à la température $t = 0$.

Mais diverses observations, particulièrement celles des étoiles filantes et des aurores boréales, montrent que la hauteur de l'atmosphère est au moins quatre fois plus grande; il semble donc que les molécules d'air n'ont pas toutes la même vitesse, que certaines molécules ont des vitesses au moins doubles de la vitesse moyenne. Ceci complique la loi de diminution de la température et aussi celle de la densité. On remarque

d'abord que les seules molécules qui peuvent atteindre la hauteur z sont celles dont la vitesse est plus grande que $\sqrt{2gz}$ et ensuite que, parmi celles-là, un nombre d'autant plus grand atteint cette hauteur que la vitesse est plus grande. Par conséquent, quoique la force vive de chacune des molécules qui atteignent la hauteur z soit diminuée de la même quantité $2mgz$, la force vive moyenne est diminuée d'une quantité moindre.

Énergie totale d'un gaz.

129. Jusqu'ici nous avons considéré, dans les raisonnements, des gaz absolument simples, c'est-à-dire des gaz dont les molécules seraient des atomes sans dimensions, ou, comme on dit en Mécanique, des points matériels, centres de forces attractives ou répulsives. Mais les gaz réels, même ceux qu'en Chimie on appelle *simples*, paraissent formés de molécules, dont chacune est la réunion de plusieurs atomes; dans ce cas, outre leur mouvement de translation, les molécules possèdent d'autres mouvements : elles tournent sur elles-mêmes, et les atomes qui composent chaque molécule vibrent dans l'intérieur de la molécule. *A priori*, il n'existe pas de relation nécessaire entre ces trois mouvements, qui paraissent indépendants les uns des autres; car on peut concevoir un état tel que les molécules tournent sur elles-mêmes, et qu'il y ait des vibrations intérieures, sans que les centres de gravité des molécules se déplacent. Mais, dès que le mouvement de translation existe, les chocs des molécules entre elles doivent produire des rotations oscillatoires ou continues et mettre les atomes en mouvement dans chaque molécule; une partie de l'énergie du mouvement de translation passera ainsi dans les autres mouvements, mais la force vive totale restera la même. Les rotations et les vibrations intérieures acquerront une intensité d'autant plus grande que le mouvement de translation sera plus rapide. De même, les rotations des molécules sur elles-mêmes ou les vibrations des atomes modifient les mouvements de translation. On conçoit, d'après cela, qu'un certain équilibre s'établisse entre ces trois mouvements.

Nous avons désigné jusqu'à présent par V_u la force vive du

mouvement de translation; nous désignerons par V la force vive totale, et nous poserons

$$V_u = kV,$$

k représentant le rapport des deux quantités. L'équation (6) du n° 127 devient

$$(9) \qquad V = \frac{3}{2} \frac{\alpha v_0 p_0}{k} T.$$

L'énergie potentielle d'un corps se compose de deux parties. La première réside dans l'intérieur même de la molécule; elle reste sensiblement constante, tant que la constitution de la molécule n'est pas modifiée. La seconde se rapporte à l'action des molécules les unes sur les autres; on admet que, dans les gaz, elle est sensiblement nulle. D'après l'expérience de M. Joule (n° 78), l'énergie totale $U = V + W$ étant une fonction de la température seule, l'énergie cinétique V, qui n'en diffère que de la quantité W, fonction de la température seule, jouit de la même propriété; il en est de même de la force vive du mouvement de translation des molécules, d'après la relation (6); on en conclut que le rapport k est fonction de la température seule.

130. Les mouvements de translation des molécules des gaz suffisent, comme nous l'avons vu, pour expliquer les phénomènes de pression et de conversion de la chaleur en travail ou inversement. Mais, dans les expériences de calorimétrie, il est nécessaire de considérer la force vive totale V.

Les chaleurs spécifiques des gaz à volume constant et à pression constante ont pour expressions (n° 81)

$$C_v = \frac{dU}{dT} = \frac{dV}{dT} = \frac{3}{2} \frac{\alpha v_0 p_0}{k},$$

$$C_p = C_v + \alpha v_0 p_0.$$

On en déduit

$$(10) \qquad k = \frac{3}{2} \frac{C_p - C_v}{C_v} = \frac{3}{2}(\gamma - 1).$$

Les chaleurs spécifiques des gaz étant indépendantes de la

température (nº **84**), le rapport k est aussi indépendant de la température; c'est une constante pour chaque gaz. On en conclut que *l'énergie cinétique d'un gaz est proportionnelle à la température absolue.*

La valeur du rapport k de la force vive partielle V_u à la force vive totale V dépend du rapport γ des deux chaleurs spécifiques. Or l'expérience apprend que, dans les gaz qui suivent sensiblement la loi de Mariotte, le rapport γ a à peu près la même valeur $\gamma = 1,3945$, ce qui donne pour k la valeur $k = 0,59$, à peu près la même pour tous les gaz. Il semble résulter de là qu'une partie assez grande de la force vive totale, environ les quatre dixièmes, n'appartient pas au mouvement de translation des molécules, mais aux autres mouvements, tels que rotations des molécules ou vibrations des atomes dans chaque molécule. Ceci conduit à penser que les gaz que l'on appelle *simples,* comme l'hydrogène, l'oxygène, l'azote, ne le sont pas en réalité, et que leurs molécules sont formées de la réunion d'un certain nombre d'atomes.

L'équation (4) du nº **123** devient

$$(11) \qquad vp = \frac{2}{3} kV.$$

Il en résulte que *des volumes égaux des différents gaz, sous la même pression, possèdent, à la même température, la même quantité d'énergie cinétique.*

Lois de combinaison des gaz.

131. Gay-Lussac a montré que les gaz, à la même température et à la même pression, se combinent entre eux dans des rapports simples de volumes, et que, si le composé est gazeux, son volume est aussi dans un rapport simple avec celui des gaz combinés. En considérant le cas le plus simple, celui où deux gaz simples se combinent à volumes égaux, on a été amené à penser que des volumes égaux des deux gaz, à la même température et à la même pression, renferment le même nombre de molécules. Ces volumes égaux des deux gaz possédant à la même température des quantités égales d'énergie cinétique,

la force vive moyenne de chaque molécule est la même de part et d'autre; en d'autres termes, deux gaz sont à la même température lorsque la force vive moyenne d'une molécule est la même.

Désignons par a et b les molécules des deux gaz, et soit n le nombre des molécules contenues dans l'unité de volume. Si les molécules étaient mono-atomiques, les n atomes a, se combinant avec n atomes b, formeraient n molécules ab. Mais l'expérience apprend que le gaz composé occupe un volume double; chaque unité de volume du gaz composé ne contiendrait ainsi que $\frac{n}{2}$ molécules. L'énergie cinétique de cette unité de volume, d'après l'équation (11), étant la même que celle de l'unité de volume de chacun des gaz combinés, la force vive moyenne d'une molécule composée ab serait double de celle d'une molécule simple a ou b. Afin de généraliser la loi précédente, M. Clausius suppose que chacune des molécules des gaz simples est formée de la réunion de deux atomes a ou de deux atomes b et que la combinaison des deux gaz est précédée d'une double décomposition. Si donc l'on représente par $\ddot{a}$ et par $\ddot{b}$ les molécules des deux gaz, la réaction sera figurée par la formule

$$n(\ddot{a}) + n(\ddot{b}) = 2n(\dot{a}\dot{b}).$$

De cette manière, l'unité de volume du gaz composé contiendra n molécules $\dot{a}\dot{b}$, et la force vive de chacune d'elles sera la même que celle des molécules $\ddot{a}$ ou $\ddot{b}$. A ce type appartiennent le bioxyde d'azote et l'acide chlorhydrique : car un volume d'oxygène et un volume d'azote donnent deux volumes de bioxyde d'azote, et, de même, un volume de chlore et un volume d'hydrogène donnent deux volumes d'acide chlorhydrique.

Un second type est celui où un volume du premier gaz et deux volumes du second donnent deux volumes du gaz composé. La réaction sera représentée par la formule

$$n(\ddot{a}) + 2n(\ddot{b}) = 2n(\dot{a}\ddot{b}).$$

A ce type appartiennent le protoxyde d'azote, l'eau et l'acide

sulfhydrique : car un volume d'oxygène et deux volumes d'azote donnent deux volumes de protoxyde d'azote, un volume d'oxygène et deux d'hydrogène donnent deux volumes de vapeur d'eau, et, de même, un volume de soufre et deux d'hydrogène donnent deux volumes d'acide sulfhydrique.

Un troisième type est celui où un volume du premier gaz et trois du second donnent deux volumes de gaz composé. La réaction sera figurée par la formule

$$n(\ddot{a}) + 3n(\ddot{b}) = 2n(\dot{a}\dddot{b}).$$

A ce type appartient l'ammoniaque, car un volume d'azote et trois d'hydrogène donnent deux volumes d'ammoniaque.

Mais l'hypothèse précédente, qui consiste à regarder les molécules des gaz simples comme biatomiques, est insuffisante peur rendre compte de combinaisons plus complexes; ainsi deux volumes d'acide chlorhydrique et deux volumes d'ammoniaque donnent quatre volumes de chlorhydrate d'ammoniaque. On aurait, d'après les formules précédentes,

$$2n(\dot{\mathrm{Cl}}\dot{\mathrm{H}}) + 2n(\dot{\mathrm{Az}}\,\dddot{\mathrm{H}}) = 4\,\frac{n}{2}(\dot{\mathrm{Cl}}\,\dot{\mathrm{Az}}\,\ddddot{\mathrm{H}});$$

chaque volume du nouveau gaz ne renfermerait que $\frac{n}{2}$ molécules. On rétablit l'analogie en supposant que les molécules des gaz simples sont formées de la réunion de quatre atomes; le trois types précédents deviennent alors

$$\begin{aligned}
n(a^4) + n(b^4) &= 2n(a^2b^2),\\
n(a^4) + 2n(b^4) &= 2n(a^2b^4),\\
n(a^4) + 3n(b^4) &= 2n(a^2b^6),
\end{aligned}$$

et la réaction qui donne naissance au chlorhydrate d'ammoniaque est figurée par la formule

$$2n(\ddot{\mathrm{Cl}}\,\ddot{\mathrm{H}}) + 2n(\ddot{\mathrm{Az}}\,\mathrm{H}^6) = 4n(\dot{\mathrm{Cl}}\dot{\mathrm{Az}}\,\ddddot{\mathrm{H}}).$$

132. En adoptant cet ordre d'idées, on arrive ainsi aux deux lois suivantes :

1° *Des volumes égaux de tous les gaz, simples ou composés*

à la même température et à la même pression, contiennent le même nombre de molécules;

2° *A la même température, l'énergie cinétique moyenne d'une molécule est la même pour tous les gaz: elle est proportionnelle à la température absolue.*

Il en résulte que, sous la même pression et à la même température, des volumes égaux de tous les gaz renferment la même quantité de chaleur. Ceci donne un premier aperçu de la quantité de chaleur dégagée ou absorbée dans un phénomène chimique; mais il faut tenir compte en outre du travail de la pression extérieure, lorsqu'il y a changement de volume, et aussi de la variation d'énergie potentielle constitutive des molécules. Il convient, en effet, de considérer chaque molécule comme possédant une certaine quantité d'énergie potentielle se rapportant au travail des forces qui s'exercent entre les atomes ou les parties dont elle est composée; quand le mode de groupement des atomes ou des parties change, l'énergie potentielle varie; une augmentation ou une diminution d'énergie potentielle se traduit par une quantité égale de chaleur absorbée ou dégagée.

Par exemple, dans les réactions du premier type, l'énergie cinétique des n molécules a^4 et des n molécules b^4 est égale à celle des $2n$ molécules a^2b^2, et, le volume total n'ayant pas changé, il n'y a pas de phénomène calorifique provenant de la pression. La quantité de chaleur absorbée ou dégagée se rapporte donc uniquement à la variation d'énergie potentielle; elle est égale au travail nécessaire pour séparer chaque molécule a^4 ou b^4 en deux parties a^2+a^2 ou b^2+b^2, moins le travail accompli par la réunion de chaque partie a^2 avec une partie b^2. Le quatrième type présente le même caractère, sauf un mode différent de décomposition des molécules primitives et de groupement des atomes pour former la nouvelle molécule. Dans les combinaisons du second type, si l'on désigne par q l'énergie cinétique d'une molécule à la température T de l'expérience, les $3n$ molécules primitives possédant une énergie cinétique égale à $3nq$ et les $2n$ molécules nouvelles une énergie égale seulement à $2nq$, il y a de ce fait dégagement d'une quantité de chaleur égale à nq, égale par conséquent à celle que possédait chacun des volumes combi-

nés. Cette quantité de chaleur dégagée est proportionnelle à la température absolue. D'autre part, les trois volumes primitifs se réduisant à deux, la pression extérieure accomplit un travail positif, et par conséquent produit le dégagement d'une nouvelle quantité de chaleur; enfin il y a une variation d'énergie potentielle. Il est clair que dans les phénomènes inverses les quantités de chaleur changent de signe; si une réaction est accompagnée d'un dégagement de chaleur, l'opération inverse exige l'absorption de la même quantité de chaleur.

La loi à laquelle nous sommes arrivés par l'étude des gaz, savoir que l'énergie cinétique d'une molécule est la même à la même température, paraît s'étendre aux corps solides et aux corps liquides. Dulong et Petit ont reconnu en effet que, pour les corps simples, solides ou liquides, le produit de la chaleur spécifique par le poids atomique est constant; il en résulte que l'accroissement d'énergie cinétique d'une molécule pour une même élévation de température est la même pour tous les corps; l'énergie étant nulle au zéro absolu, on en conclut que l'énergie cinétique d'une molécule est la même à la même température. Toutefois, la loi de Dulong et Petit n'est qu'une première approximation; la chaleur spécifique des corps solides et des liquides varie avec la température d'une manière notable et différente pour chaque corps.

M. Wœstine a étendu cette loi aux corps composés, mais elle ne se vérifie alors assez exactement que pour ceux qui présentent certaines analogies chimiques.

Conséquences de la loi générale.

133. En réfléchissant à ce qui précède, on est conduit à admettre la loi générale suivante, que l'on peut regarder comme définissant la température absolue :

1° *Deux corps sont à la même température lorsque l'énergie cinétique moyenne est la même dans les deux corps; la température absolue d'un corps est proportionnelle à l'énergie cinétique moyenne d'une molécule.*

Si donc on appelle T la température absolue, q l'énergie

cinétique moyenne d'une molécule, on a

$$q = \lambda T,$$

λ étant une même constante pour tous les corps.

D'après cela, l'énergie cinétique d'un corps qui comprend n molécules est

$$\text{(12)} \qquad V = n\lambda T.$$

Nous avons désigné par k le rapport de la force vive de translation d'une molécule de gaz à sa force vive totale, de sorte que l'énergie du mouvement de translation des molécules du gaz est

$$V_u = kV = kn\lambda T.$$

Si l'on admet que le rapport k est constant et le même pour tous les gaz, on retrouve, en partant de la loi énoncée plus haut, les lois idéales des gaz parfaits. Mais il n'y a pas de raison théorique d'admettre que ce rapport soit rigoureusement constant et le même pour tous les gaz; car l'ébranlement intérieur communiqué aux molécules par les chocs des molécules entre elles dépend de la vitesse de translation et aussi, quand cette vitesse est constante, du nombre des chocs et par conséquent du volume occupé par les gaz; il dépend encore de la constitution de la molécule. Nous regarderons donc le rapport k comme une fonction des deux variables v et T, fonction particulière pour chaque gaz. La variation de ce rapport permettra d'expliquer comment les gaz réels s'écartent des lois idéales considérées jusqu'à présent.

134. Examinons d'abord la pression. La manière dont on explique la pression exercée par un gaz sur une surface plane conduit à la relation

$$vp = \frac{2}{3}V_u = \frac{2}{3}kV;$$

cette relation, en vertu de la loi fondamentale (12), devient

$$\text{(13)} \qquad vp = \frac{2}{3}n\lambda kT.$$

Si le rapport k était indépendant de v, le produit vp conser-

verait une valeur constante à la même température : c'est la loi de Mariotte. Mais si le rapport k varie avec le volume, la température étant constante, le produit vp varie lui-même dans le même sens ; si, par exemple, le rapport k diminue, quand le volume augmente, le produit vp diminue ; c'est en effet ce qui a lieu pour tous les gaz, excepté l'hydrogène, d'après les expériences de Regnault. Il semble même que le rapport tende vers une valeur limite constante, quand la température est de plus en plus élevée, car la variation du produit vp, qui est sensible à basse température, devient très petite à haute température. Pour l'hydrogène, au contraire, le produit vp augmente quand le volume augmente, et le rapport k ne tend plus vers une valeur constante, quand la température s'élève.

135. Calculons maintenant le coefficient de dilatation

$$\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{dv}{dT}\right)_p = \left(\frac{d\log v}{dT}\right)_p.$$

De l'équation (13) on déduit

$$v = \frac{2}{3}\frac{n\lambda}{p}kT, \tag{14}$$

$$\left(\frac{d\log v}{dT}\right)_p = \frac{1}{T} + \left(\frac{d\log k}{dT}\right)_p = \frac{1}{T} + \frac{1}{k}\left(\frac{dk}{dT}\right)_p,$$

et par suite

$$\alpha = \frac{1}{T} + \frac{1}{k}\left(\frac{dk}{dT}\right)_p. \tag{15}$$

Si le rapport k était constant, tous les gaz auraient le même coefficient de dilatation $\alpha = \frac{1}{T}$; c'est la loi de Gay-Lussac (n° 77).

Tous les gaz, excepté l'hydrogène, ayant un coefficient de dilatation α plus grand que $\frac{1}{T}$, il semble en résulter que la dérivée $\left(\frac{dk}{dT}\right)_p$ a une valeur positive. Pour l'hydrogène, au contraire, dont le coefficient de dilatation est plus petit que $\frac{1}{T}$, elle aurait une valeur négative.

Le rapport k étant regardé comme une fonction de T et de v, on a, en imaginant que dans cette fonction on remplace v par sa valeur (14),

$$(16) \qquad \left(\frac{dk}{dT}\right)_p = \frac{\partial k}{\partial T} + \frac{\partial k}{\partial v}\left(\frac{dv}{dT}\right)_p = \frac{\partial k}{\partial T} + \alpha v \frac{\partial k}{\partial v}.$$

La dérivée partielle $\frac{\partial k}{\partial v}$ ayant une valeur négative pour tous les gaz excepté l'hydrogène, il est nécessaire que l'autre dérivée partielle $\frac{\partial k}{\partial T}$ ait une valeur positive plus grande en valeur absolue; ainsi, tandis que la valeur du rapport k diminue quand le volume augmente, elle augmente quand la température augmente. C'est le contraire pour l'hydrogène.

136. Occupons-nous enfin des chaleurs spécifiques. De l'équation

$$dQ = dU + p\,dv = dV + p\,dv,$$

on déduit la chaleur latente à volume constant,

$$(17) \qquad C_v = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_v = \frac{dV}{dT} = n\lambda;$$

elle est constante pour chaque gaz et proportionnelle au nombre des molécules contenues dans l'unité de poids et, par conséquent, inversement proportionnelle au poids atomique. C'est la loi de Dulong et Petit.

La chaleur spécifique à pression constante est

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = \frac{dV}{dT} + p\left(\frac{dv}{dT}\right)_p = \frac{dV}{dT} + \alpha v p;$$

on en déduit

$$C_p - C_v = \alpha v p = \frac{2}{3} n\lambda k \alpha T,$$

et par suite

$$(18) \qquad \gamma - 1 = \frac{2}{3} k \alpha T.$$

Si le rapport k était constant, on aurait $\alpha T = 1$, et le rapport γ des chaleurs spécifiques serait aussi constant et le même pour tous les gaz. Mais, si le rapport k est variable, le rapport γ est

aussi variable. Pour l'hydrogène, on a $\gamma - 1 < \frac{2}{3} k$, et pour tous les autres gaz, $\gamma - 1 > \frac{2}{3} k$.

L'équation (13) montre que si le rapport k était le même pour tous les gaz, tout en étant variable avec la température et le volume ou la pression, des volumes égaux des différents gaz, à la même température et sous la même pression, contiendraient exactement le même nombre de molécules; les gaz se combineraient, soit à volumes égaux, soit dans des rapports simples de volumes. Mais, si la valeur de k est différente, les volumes de deux gaz qui contiennent le même nombre de molécules sont proportionnels aux valeurs de k, et la loi des volumes doit être modifiée en conséquence.

État solide.

137. L'action d'un point matériel sur une molécule formée de la réunion de plusieurs atomes se compose d'une force appliquée au centre de gravité de la molécule et d'un couple dont le moment est d'autant plus grand que la molécule est plus grande. Lorsqu'un système de molécules est en équilibre, la résultante des forces appliquées au centre de gravité de chacune d'elles est nulle, ainsi que le couple résultant. Imaginons que l'on fasse tourner l'une des molécules autour de son centre de gravité d'un angle très petit, laissant toutes les autres fixes, le couple provenant des actions des autres molécules sur la première acquerra une certaine valeur et tendra à ramener cette molécule à sa position primitive. L'expérience apprend que ce couple a une grande intensité dans les corps solides, tandis qu'il est très faible dans les liquides. Il semble résulter de là que les molécules d'un corps solide sont plus grandes que celles du même corps à l'état liquide. On peut se représenter les choses en admettant que chaque molécule du solide est formée de la réunion de plusieurs molécules égales, reliées par leurs attractions mutuelles, et que le phénomène de la fusion consiste dans la séparation ou la dissociation des parties.

Il est évident d'abord que les vibrations intérieures des molécules complexes tendent à en séparer les parties, d'autant plus que les vibrations sont plus rapides. Si, laissant la pression extérieure constante, on élève progressivement la température, il arrivera un moment où les parties qui forment la molécule complexe se sépareront. Cette température de dissociation ou de fusion est fonction de la pression. On remarque ensuite que les molécules dissociées, ayant des masses plus petites, et devant posséder chacune la même énergie cinétique que chacune des molécules primitives à la même température, sont animées de mouvements plus rapides que celles-ci, soit qu'il s'agisse des mouvements de leurs centres de gravité, soit qu'il s'agisse des mouvements de rotation des molécules sur elles-mêmes ou des vibrations intérieures des atomes qui les composent; ces mouvements font disparaître en grande partie l'influence de la forme des molécules et diminuent la grandeur des couples qui produisent la rigidité des solides.

Il est aisé de comprendre que tout phénomène de dissociation exige l'absorption d'une certaine quantité de chaleur. Si, par exemple, chacune des molécules primitives se divise en deux, le nombre des molécules devenant double, l'énergie cinétique du système devient deux fois plus grande à la même température; le système aura donc absorbé dans ce cas une quantité de chaleur égale à celle qu'il possédait d'abord. Il faudra en outre tenir compte de la variation d'énergie potentielle et du travail de la pression extérieure. La somme totale des quantités de chaleur absorbées dans la transformation d'un solide en liquide constitue ce qu'on appelle *chaleur latente de fusion*.

Vaporisation.

138. La formation des vapeurs se présente sous un aspect un peu différent. On remarque d'abord que les vapeurs se forment à toute température. Supposons qu'une certaine quantité de liquide soit placée dans un vase clos privé d'air. Les molécules du liquide sont animées de vitesses de translation plus ou moins grandes; certaines molécules, traversant la surface libre dans des circonstances favorables, sortent de la sphère d'at-

traction des molécules voisines et s'échappent en ligne droite dans l'espace supérieur, où elles forment une vapeur analogue à un gaz. Elles rebondissent contre les parois du vase, se choquent entre elles et viennent rencontrer de nouveau la surface du liquide; les unes rebondissent contre cette surface, d'autres pénètrent par les pores et rentrent dans l'intérieur. Il s'établit ainsi un état d'équilibre, dans lequel le nombre des molécules qui rentrent est égal au nombre de celles qui sortent. Le nombre des molécules qui sortent dans un temps donné étant d'autant plus grand que la température est plus élevée, on conçoit que la densité de l'atmosphère de vapeur qui remplit la partie supérieure du gaz tende vers une limite, fonction de la température, et croissant avec la température.

139. Telle est la manière dont M. Clausius envisage la vaporisation. Mais il est probable que ce phénomène est accompagné, comme la fusion, d'une dissociation des molécules, et, puisque la vapeur se forme à toute température, que cette nouvelle dissociation s'opère graduellement dans le liquide, à mesure que la température s'élève. Nous regarderons donc les molécules du liquide comme formées elles-mêmes de la réunion de plusieurs molécules égales; comme cela a lieu dans les gaz, ces molécules ne sont pas toutes animées de la même vitesse; c'est la force vive moyenne d'une molécule qui détermine la température; celles qui ont la plus grande énergie cinétique se décomposent d'abord, et le liquide, sur la surface duquel nous supposons placé un piston, afin qu'il n'y ait pas d'espace libre, peut être considéré comme un mélange de molécules complexes et de molécules dissociées, dans une proportion déterminée, fonction de la température. Il est clair que le nombre des molécules dissociées est d'autant plus grand que la température est plus élevée.

Le liquide étant amené ainsi à une certaine température, si l'on soulève le piston, des molécules s'échapperont du liquide, les unes complexes, les autres dissociées; mais ces dernières sortiront en plus grande abondance, à cause de leur petitesse et de leur plus grande vitesse. L'atmosphère de va-

peur qui se formera dans l'espace libre sera elle-même un mélange de deux sortes de molécules; mais la proportion des molécules dissociées y sera beaucoup plus grande que dans le liquide.

Par suite, la proportion de ces dernières dans le liquide s'abaissera au-dessous de la proportion normale relative à la température de l'expérience et de nouvelles molécules complexes se décomposeront dans le liquide pour y établir la proportion normale, ce qui exigera l'absorption d'une certaine quantité de chaleur. Si l'on soulève de nouveau le piston, le même phénomène continuera jusqu'à ce que tout le liquide soit converti en vapeur. La quantité de chaleur qui se rapporte aux molécules dissociées pendant l'opération même, jointe à la variation d'énergie potentielle et au travail de la pression, constitue ce qu'on appelle *chaleur latente de vaporisation*. Si, avant de soulever le piston, on porte le liquide à une température plus élevée, le nombre des molécules dissociées préalablement dans le liquide, c'est-à-dire avant la sortie de la vapeur, sera plus grand; on conçoit de cette manière que le nombre de celles qui se dissocieront pendant la sortie même de la vapeur soit moindre et par conséquent que la chaleur latente soit plus petite, ainsi que l'apprend l'expérience. La remarque faite par M. Andrews (n° 42) semble prouver qu'à une certaine température toutes les molécules complexes sont dissociées, de telle sorte qu'il n'y a plus de différence entre l'état liquide et l'état de vapeur.

En résumant ce qui précède, nous appellerons *molécule élémentaire* ou *constitutive* d'une substance la molécule gaz. La réunion de plusieurs de ces molécules élémentaires formera la molécule liquide; la réunion de plusieurs de ces dernières formera un groupe plus complexe qui sera la molécule solide. Les phénomènes de changement d'état consistent dans le groupement ou la dissociation des molécules, et ces phénomènes sont accompagnés, comme les phénomènes chimiques, de dégagement ou d'absorption de chaleur. Si l'on admet la loi fondamentale énoncée au n° 133, la cause principale des phénomènes calorifiques qui accompagnent ces phénomènes physiques ou chimiques réside dans le changement du nombre des molécules.

140. Nous avons considéré jusqu'ici la formation de la vapeur dans le vide. Si l'espace libre situé au-dessus du liquide était occupé par un gaz sans action sur le liquide, la vaporisation s'effectuerait de la même manière, seulement elle serait plus lente. Quand une molécule, s'échappant de la surface du liquide, rencontre une molécule de gaz dans le voisinage, elle peut rebrousser chemin et rentrer dans le liquide; il sortira donc pendant l'unité de temps un nombre moindre de molécules que si l'espace était vide de gaz. Il en est de même au retour des molécules de vapeur vers le liquide; les chocs produits par le gaz empêchent un certain nombre d'entre elles de rentrer dans le liquide. Comme les chances de choc sont les mêmes à l'entrée et à la sortie des molécules, les échanges qui ont lieu entre le liquide et la vapeur seront diminués dans le même rapport, et l'atmosphère de vapeur sera la même que si l'espace libre était vide de gaz; seulement l'équilibre sera plus lent à s'établir.

CHAPITRE IX.

APPLICATIONS A LA PHYSIQUE CÉLESTE.

Condensation des nébuleuses. — Chaleur terrestre. — Chaleur solaire. — Régénération de la chaleur solaire.

Condensation des nébuleuses.

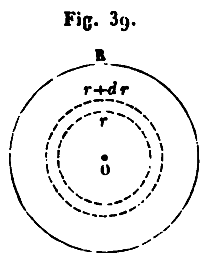
141. La Théorie mécanique de la chaleur permet de compléter l'idée de Laplace, relative à la formation des astres. Laplace supposait que les astres se sont formés par la condensation des nébuleuses, en vertu de l'attraction de leurs parties. Pendant que la condensation d'une nébuleuse s'opère, l'attraction mutuelle de ses éléments accomplit un travail positif très grand; c'est ce travail qui crée la chaleur et la lumière.

Calculons d'abord le travail produit par la chute d'une masse m sur un globe sphérique de masse M et de rayon R. L'attraction exercée sur la masse m par le globe sphérique, supposé homogène ou formé de couches concentriques homogènes, est la même que si la masse du globe était concentrée en son centre; elle est égale à $\frac{fMm}{r^2}$, r étant la distance de la masse m au centre de la sphère et f le coefficient d'attraction, c'est-à-dire l'attraction de deux masses égales, à l'unité de distance. Le travail élémentaire pour un déplacement dr de la masse m est $-\frac{fMm}{r^2}\,dr$ et le travail total $fMm\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_0}\right)$. Si la masse m vient d'une distance R_0 infiniment grande, le travail est

$$\frac{fMm}{R}. \tag{1}$$

Considérons maintenant une nébuleuse diffuse très étendue de masse M qui, par sa condensation, a donné naissance à un globe sphérique de rayon R et que nous supposerons homogène (*fig.* 39). Une surface sphérique concentrique d'un rayon r inférieur à R enveloppe une masse $M' = M\,\frac{r^3}{R^3}$, et la couche comprise entre les deux surfaces sphériques de rayons r et $r + dr$ a une masse $dM' = M\,\frac{3r^2dr}{R^3}$. Pendant la condensation de la nébuleuse, chaque portion m de la couche dM'

Fig. 39.



peut être regardée comme soumise uniquement à l'attraction de la masse intérieure M', puisque l'attraction exercée sur elle par les couches extérieures est nulle. Cette attraction étant la même que si la masse M' était concentrée au centre O de la sphère, le travail relatif à la masse m, d'après la formule (1), est $\frac{fM'm}{r}$ et le travail relatif à la couche dM' est

$$\frac{fM'dM'}{r} = \frac{3fM^2r^4dr}{R^6}.$$

Pour obtenir le travail relatif à la sphère entière, il faut intégrer cette expression en faisant varier r de o à R, ce qui donne

$$\mathfrak{T} = \frac{3fM^2}{5R},$$

ou, en calories,

$$Q = \frac{3fM^2}{5R \times 436} \text{ calories.} \tag{2}$$

Chaleur terrestre.

142. Si l'on désigne par M_1 la masse de la Terre et par R_1 son rayon, l'attraction qu'elle exerce sur une masse m placée à sa surface est $\frac{fM_1 m}{R_1^2}$; mais cette attraction est le poids mg du corps; on a donc l'égalité $\frac{fM_1}{R_1^2} = g$, qui détermine le produit $fM_1 = gR_1^2$. Si l'on imagine que la Terre se soit formée par la condensation d'une portion de la grande nébuleuse solaire, la quantité de chaleur produite par cette condensation est

$$(3) \qquad Q_1 = \frac{3fM_1^2}{5R_1 \times 436} = \frac{3M_1 g R_1}{5 \times 436} \text{ calories};$$

d'où l'on déduit

$$(4) \qquad \frac{Q_1}{M_1 g} = \frac{3R_1}{5 \times 436} = 8760.$$

On en conclut que la chaleur produite par la condensation du globe terrestre est égale à 87 fois la quantité de chaleur nécessaire pour élever de zéro à 100° une masse d'eau égale à la masse de la Terre. Cette chaleur propre du globe terrestre est capable de maintenir en fusion le noyau intérieur; elle se dissipe très lentement, à cause de la croûte peu conductrice qui l'enveloppe.

Chaleur solaire.

143. Si l'on désigne par M la masse du Soleil et par R son rayon, la quantité de chaleur produite par la condensation de la nébuleuse solaire est donnée par la formule (2). On en déduit, en divisant membre à membre les formules (2) et (3),

$$\frac{Q}{Q_1} = \frac{M^2}{M_1^2} : \frac{R}{R_1};$$

d'où

$$\frac{\left(\frac{Q}{Mg}\right)}{\left(\frac{Q_1}{M_1 g}\right)} = \frac{M}{M_1} : \frac{R}{R_1} = \frac{324000}{108} = 3000,$$

et, par suite,

$$(5)\qquad \frac{Q}{Mg} = \frac{Q_1}{M_1 g} \times 3000 = 8760 \times 3000 = 26.10^6.$$

Ainsi la chaleur solaire est, pour chaque unité de masse, 3000 fois plus grande que la chaleur terrestre. Elle est égale à 260000 fois la chaleur nécessaire pour élever de zéro à 100° la température d'une masse d'eau égale à la masse du Soleil. Cette quantité de chaleur produite par l'attraction est extrêmement grande; il est probable, d'après cela, que la température du Soleil est très élevée et que les éléments qui le composent y restent dissociés.

144. Il résulte des expériences de M. Violle que la quantité de chaleur reçue en un an par une surface de un mètre carré, à la distance de la Terre au Soleil, est égale à 132.10^5 calories. La surface de la sphère, qui a pour centre le Soleil et pour rayon la distance du Soleil à la Terre, étant de 293.10^{21} mètres carrés, on en conclut que la quantité de chaleur émise par le Soleil en un an est égale à $132 \times 293 \times 10^{26}$, soit 386.10^{28} calories.

Cette émission de chaleur abaisserait graduellement la température du Soleil, si la perte n'était compensée par aucune production nouvelle de chaleur. D'après les expériences de Cavendish, la densité moyenne de la Terre est à peu près 5 fois celle de l'eau; il en résulte que la masse de la Terre est égale à celle de 54.10^{23} kilogrammes, et celle du Soleil, qui est 324000 fois plus grande, à celle de 175.10^{28} kilogrammes. Si donc on désigne par Q' la quantité de chaleur émise par le Soleil en un an, on a

$$(6)\qquad \frac{Q'}{Mg} = \frac{386}{175} = 2,2.$$

Si la chaleur spécifique du Soleil était égale à celle de l'eau, la température du Soleil s'abaisserait de plus de 2° par an.

Des équations (5) et (6), on déduit

$$(7)\qquad \frac{Q}{Q'} = \frac{26.10^6}{2,2} = 12.10^6.$$

La chaleur totale du Soleil est 12 000 000 de fois plus grande que la partie émise chaque année, de sorte que, si l'émission était uniforme, elle se dissiperait en 12 000 000 d'années.

Régénération de la chaleur solaire.

145. Parmi les différentes causes de régénération de la chaleur solaire, la plus importante, suivant la remarque de M. Helmholtz, est la continuation de la condensation du Soleil. La formule (2) peut être mise sous la forme

$$QR = \frac{3fM^2}{5.436}.$$

Si le rayon, continuant à diminuer, devient $R + \delta R$, la nouvelle condensation produira une quantité de chaleur δQ satisfaisant à la relation

$$\frac{\delta Q}{Q} = \frac{-\delta R}{R},$$

que l'on déduit de la précédente par la différentiation.

Elle sera égale à la quantité de chaleur Q' perdue par le rayonnement, si l'on a, d'après l'équation (7),

$$\frac{-\delta R}{R} = \frac{Q'}{Q} = \frac{1}{12.10^6}.$$

Telle serait la diminution annuelle du rayon qui maintiendrait constante la température du Soleil.

En un siècle, la diminution du diamètre apparent du Soleil serait moindre que la cent millième partie de ce diamètre, quantité impossible à mesurer.

Il résulterait de cette diminution du rayon une augmentation de la vitesse angulaire de rotation du Soleil et, par conséquent, une diminution du temps de sa rotation. On sait que les actions mutuelles des molécules qui composent le Soleil ne changent pas la somme des moments des quantités de mouvement de la masse entière, par rapport à l'axe de rotation (n° 15). Si l'on désigne par p la distance à l'axe d'une molécule de masse m et par ω la vitesse angulaire de rotation,

la somme des moments des quantités de mouvement de la masse entière est $\omega \Sigma mp^2$. Supposons que toutes les longueurs soient réduites dans le même rapport $\frac{\delta p}{p} = \frac{\delta R}{R}$, on aura, en différentiant le produit constant $\omega \times \Sigma mp^2$,

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = 2\frac{-\delta R}{R},$$

ou, en appelant T le temps de la rotation,

$$\frac{-\delta T}{T} = 2\frac{-\delta R}{R} = \frac{1}{6.10^6}.$$

Telle serait la diminution annuelle du temps de la rotation du Soleil, ce qui ferait environ 36 secondes par siècle.

146. Une autre cause de production de chaleur est la chute des astéroïdes sur le Soleil. D'après la formule (1), la chaleur produite par la chute d'un astéroïde ayant une masse égale à celle de 1 kilogramme, est égale à

$$q = \frac{fM}{gR \times 436} \text{ calories.}$$

En comparant avec la formule (2), on a

$$\frac{q}{Q} = \frac{5}{3Mg};$$

d'où, en vertu de l'équation (5),

$$(8) \qquad q = \frac{5}{3}\frac{Q}{Mg} = \frac{5}{3}26.10^6 = 43.10^6 \text{ calories.}$$

Un astéroïde ayant une masse égale à celle de 1 kilogramme développe, en tombant sur le Soleil d'une distance infinie, une quantité de chaleur égale à 430 000 fois la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 100° la température d'un litre d'eau.

Pour compenser la perte due au rayonnement, comme on a

$$\frac{Q'}{q} = \frac{386.10^{28}}{43.10^6} = 9.10^{22},$$

il faudrait une chute annuelle de 9.10^{22} kilogrammes. La surface du Soleil étant de 5.10^{18} mètres carrés, il tomberait sur chaque mètre carré près de 20000 kilogrammes. L'espace environnant serait sillonné par une pluie d'astéroïdes. Si l'on suppose qu'ils viennent de toutes les directions uniformément, la surface de la sphère qui a pour rayon la distance du Soleil à la Terre étant de 293.10^{21}, ou plus simplement 3.10^{23} mètres carrés, il tomberait annuellement sur la Terre 300gr par mètre carré, ce qui est inadmissible. L'attraction de la Terre augmenterait encore cette quantité. On doit en conclure que la chute des astéroïdes n'entre que pour une part très faible dans la régénération de la chaleur solaire.

Une conséquence de ce phénomène serait une augmentation de la masse du Soleil et par conséquent la diminution du temps de la révolution des planètes. On sait, en effet, que le demi-grand axe a de l'orbite d'une planète, le temps T de sa révolution autour du Soleil, et la masse M du Soleil sont liés par la relation

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f M.$$

On en déduit entre leurs variations la relation

$$3\frac{\delta a}{a} - 2\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta M}{M}.$$

Il est aisé de voir qu'une augmentation de la masse du Soleil diminue le grand axe de l'orbite d'une planète; le premier terme étant négatif, on a par année

$$\frac{-\delta T}{T} > \frac{1}{2}\frac{\delta M}{M} = \frac{9.10^{22}}{2.175.10^{28}} = \frac{26}{10^9}.$$

Pour la Terre, la diminution du temps de la révolution serait supérieure à huit dixièmes de seconde par an, ce qui ferait une minute et vingt secondes par siècle. Une pareille diminution eût été observée.

147. M. W. Thomson a proposé une autre cause de régénération de la chaleur solaire. La lumière zodiacale est regardée comme une extension de l'atmosphère du Soleil, ou un reste de la nébuleuse primitive. M. W. Thomson la suppose

composée d'astéroïdes circulant autour du Soleil dans des orbites presque circulaires, comme les planètes. Le temps T de la révolution d'un astéroïde, décrivant un cercle d'un rayon très peu supérieur au rayon du Soleil, est donné par la troisième loi de Kepler,

$$\frac{T}{1 \text{ an}} = \left(\frac{108}{24000}\right)^{\frac{3}{2}},$$

d'où

$$T = 2^{h},6.$$

Ce temps est 230 fois plus petit que le temps de la rotation du Soleil sur lui-même, et, par conséquent, la vitesse de l'astéroïde est 230 fois plus grande que celle d'un point de la surface du Soleil à l'équateur. Lorsque, par l'effet de la résistance d'un milieu, le rayon de l'orbite diminue, et que l'astéroïde rencontre la surface du Soleil, il se produit un choc qui donne naissance à de la chaleur.

Un astéroïde venant de l'infini peut être assimilé à une comète décrivant une parabole. Or on sait qu'à la même distance du Soleil le carré de la vitesse sur une parabole est double du carré de la vitesse sur l'orbite circulaire. Il en résulte que, au moment où un pareil astéroïde rencontre la surface du Soleil, il possède une force vive double de celle d'un astéroïde appartenant à la lumière zodiacale. Il faudrait donc, pour compenser la perte de chaleur due au rayonnement, une quantité de ces derniers astéroïdes double, c'est-à-dire environ 18.10^{22} kilogrammes par an. On serait obligé d'admettre que la lumière zodiacale a une grande masse; par exemple, pour compenser la perte pendant un million d'années, il faudrait une quantité d'astéroïdes ayant une masse égale à la dixième partie de celle du Soleil. Une masse pareille, disposée en forme de lentille ou de disque plat autour du Soleil, produirait sur la planète Mercure, comme l'a montré Le Verrier, des perturbations beaucoup plus grandes que les perturbations observées.

148. Enfin on a eu recours aux actions chimiques. Nous avons déjà fait observer (n° 143) que la température très élevée du Soleil, maintenant les éléments dissociés, empêche les combinaisons chimiques de s'accomplir. Nous ajouterons

que, même si les combinaisons s'opéraient, les quantités de chaleur qu'elles produiraient seraient très petites par rapport aux quantités développées par les grandes actions mécaniques dont nous venons de parler. La combinaison chimique qui dégage le plus de chaleur est celle de l'hydrogène et de l'oxygène; 1 kilogramme d'hydrogène combiné à 8 kilogrammes d'oxygène, pour former 9 kilogrammes de vapeur d'eau, dégage 34460 calories. Supposons que la masse entière du Soleil soit formée d'hydrogène et d'oxygène dans le rapport de 1 à 8; la quantité de chaleur que produirait la combinaison totale serait égale à 67.10^{32} calories; elle suffirait à peine à entretenir le foyer solaire pendant dix-huit cents ans.

CHAPITRE X.

CAPILLARITÉ.

Tension superficielle. — Conditions d'équilibre au contact de différents milieux. — Pression capillaire. — Loi de Jurin. — Tension maximum des vapeurs.

Tension superficielle.

149. Lorsqu'un liquide est en équilibre dans un vase, la surface libre, au lieu d'être horizontale dans toute son étendue, se relève ou s'abaisse le long des bords, suivant que le liquide mouille ou ne mouille pas les parois. Ces changements de niveau sont surtout manifestes lorsque le vase est très étroit, par exemple dans l'intervalle de deux lames parallèles très rapprochées ou dans les tubes dont le diamètre est comparable à l'épaisseur d'un cheveu.

Telle est l'origine du nom de *capillarité* donné à l'ensemble des phénomènes qui sont ainsi en contradiction avec les lois générales de l'Hydrostatique. Ces expériences montrent qu'il est nécessaire de faire intervenir autre chose que la pesanteur dans l'évaluation des forces qui agissent pour déterminer l'équilibre des liquides.

Laplace, qui a établi la première théorie des phénomènes capillaires, admet qu'entre deux molécules d'un même liquide s'exerce une action proportionnelle aux masses et suivant une fonction de leur distance, telle que cette force devient nulle à une distance sensible; des actions analogues existent entre des liquides différents ou entre un liquide et un corps solide. Il résulte de là que les molécules situées à la surface d'un liquide subissent l'action des molécules placées au-dessous d'elles; l'ensemble de ces actions élémentaires constitue une

pression qui s'exerce à la surface générale et se transmet à toute la masse liquide.

150. Quoi qu'il en soit de l'existence et du mécanisme de cette pression, la manière la plus simple d'expliquer les phénomènes est de concevoir qu'un liquide est enveloppé dans une sorte de membrane élastique également tendue dans tous les sens. Quand on augmente le volume d'une masse liquide, cette membrane se dilate sans se déchirer et sans que son élasticité varie. Si le liquide se divise en plusieurs parties distinctes, chacune des parties s'entoure par le jeu des forces moléculaires d'une membrane fermée limitant sa surface.

La couche dans laquelle se manifeste la tension capillaire a nécessairement une épaisseur finie. Lorsque le liquide est réduit en lame très mince, comme une bulle de savon, il peut arriver que l'épaisseur totale du liquide soit inférieure à la somme des couches capillaires des deux surfaces, et les propriétés du liquide sont alors complètement modifiées.

Si l'on imagine que la membrane élastique d'un liquide soit coupée suivant une courbe, et qu'on enlève la partie située d'un côté, il faudrait, pour maintenir le reste dans l'état primitif, appliquer sur chaque élément ds de la courbe de contour une force $T\,ds$ normale à cet élément et dans le plan tangent à la surface. Le facteur T, qui représente la valeur de cette force par unité de longueur, a reçu le nom de *tension superficielle* du liquide. La tension superficielle d'un liquide est indépendante de la forme de la surface ; elle n'est pas la même pour les différents liquides et, pour un liquide donné, elle varie avec la température.

Sur la surface de contact d'un liquide avec un corps solide, la tension superficielle est encore constante, mais avec une valeur différente de celle de la surface libre.

Enfin, au contact de deux liquides, la tension superficielle a une valeur différente de celle des deux liquides.

151. Il résulte de là qu'en toute rigueur l'énergie intérieure d'un liquide n'est pas simplement une fonction du volume et de la température. En effet, on voit aisément, par un raisonnement analogue à celui du n° 35, que si la surface d'une masse

liquide augmente de dS, le travail de la tension capillaire est égal à $-T\,dS$; c'est-à-dire qu'il a fallu dépenser un travail $T\,dS$ pour modifier la surface.

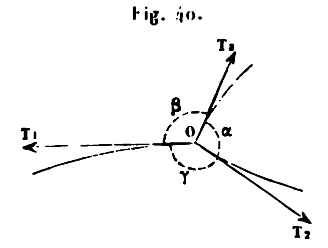
L'énergie intérieure d'un liquide se compose donc de deux termes : l'un qui est une fonction du volume et de la température, l'autre proportionnel à la surface et qui est lui-même une fonction de la température.

Conditions d'équilibre au contact de différents milieux.

152. Lorsque plusieurs milieux sont en contact, les tensions superficielles des différentes surfaces doivent se faire équilibre en tous les points d'intersection.

Considérons d'abord le cas de trois fluides, par exemple une goutte d'eau à la surface du mercure et au contact de l'air, et soient T_1, T_2 et T_3 les tensions superficielles de trois surfaces différentes. Sur un élément ds de la ligne d'intersection commune passant au point O (*fig.* 40), les trois tensions $T_1\,ds$,

Fig. 40.



$T_2\,ds$ et $T_3\,ds$ sont dans le même plan; les angles α, β, γ, que font entre elles les surfaces, sont déterminés par la condition que chacune des tensions soit égale et directement opposée à la résultante des deux autres, ce qui donne

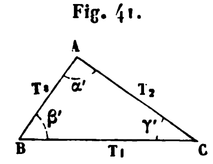
$$(1) \qquad \frac{\sin\alpha}{T_1} = \frac{\sin\beta}{T_2} = \frac{\sin\gamma}{T_3}.$$

Si l'on pose

$$\alpha' = \pi - \alpha,$$
$$\beta' = \pi - \beta,$$
$$\gamma' = \pi - \gamma,$$

l'équation (1) signifie que les forces T_1, T_2 et T_3 forment les côtés d'un triangle ABC (*fig.* 41), dont les angles sont α', β' et γ'. Les conditions d'équilibre sont donc les mêmes que celles de l'existence du triangle ABC, dont on connaît les trois côtés; c'est-à-dire qu'un côté quelconque doit être plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence.

Fig. 41.



153. Supposons que T_1 soit le plus grand côté. Il faut que l'on ait $T_1 < T_2 + T_3$; si l'on avait $T_1 \geqq T_2 + T_3$, l'équilibre ne serait pas possible. Tel est le cas, par exemple, d'une goutte d'huile placée à la surface de l'eau dans l'air; l'angle α des surfaces qui limitent la goutte diminue rapidement par le jeu des forces capillaires et la goutte s'étale de plus en plus jusqu'à ce qu'elle couvre toute la surface ou s'amincisse à un tel point que ses propriétés capillaires en soient modifiées.

Si T_2 est le plus grand côté, la condition d'équilibre est encore $T_2 < T_1 + T_3$. Lorsqu'on a $T_2 \geqq T_1 + T_3$, la goutte se contracte de plus en plus jusqu'à ce qu'elle soit tangente au liquide inférieur. Ce serait le cas d'une petite goutte de mercure placée à la surface de l'eau.

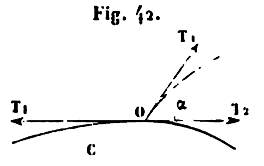
154. Lorsque deux fluides sont en contact avec un corps solide, un élément *ds* de la courbe d'intersection ne peut plus se mouvoir dans toutes les directions; il suffit alors, pour l'équilibre, que les trois tensions aient une résultante normale à la surface du solide.

Soient C le corps solide (*fig.* 42), T_1, T_2 et T_3 les tensions des trois surfaces et α l'angle que fait la surface de séparation des deux fluides avec la surface du solide; la condition d'équilibre est

$$(2) \qquad \cos\alpha = \frac{T_1 - T_2}{T_3}.$$

Cet angle α s'appelle *angle de capillarité*. On voit qu'il ne dépend que de la nature des milieux en contact et nullement de la forme des surfaces.

Fig. 42.



L'équilibre n'est possible que si l'on a $T_3 > T_1 - T_2$.

Supposons, par exemple, que l'on place une goutte liquide sur un plan horizontal. Si l'on a $T_3 < T_1 - T_2$, la goutte s'étale immédiatement. C'est ce qui a lieu pour l'eau et le verre.

Si l'on a $T_3 > T_1 - T_2$, et en même temps $T_1 > T_2$, l'angle α est aigu et l'équilibre a lieu lorsque cet angle a pris la valeur déterminée par l'équation (2).

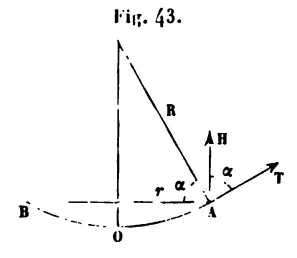
Si l'on a $T_3 > T_1 - T_2$ et $T_1 < T_2$, l'angle α d'équilibre est obtus. C'est le cas d'une goutte de mercure sur un plan de verre.

Pression capillaire.

155. Lorsque la surface d'un liquide est plane, la tension superficielle n'a pas de composante normale à la surface du liquide et ne modifie pas la pression. Si la surface est courbe, au contraire, les tensions superficielles des différents éléments ont en chaque point une résultante normale qui forme la *pression capillaire*.

Supposons que la surface du liquide appartienne à une sphère

Fig. 43.



de rayon R (*fig.* 43) et découpons sur la sphère, par un plan, une calotte AB de rayon r ayant pour centre le point O. Sur

un élément ds du contour, la tension est $T\,ds$ et sa composante $H\,ds$ parallèle à la normale au point O est égale à $T\,ds\cos\alpha$. La résultante de ces tensions le long du contour est donc

$$(3)\qquad \int T\,ds\cos\alpha = T\cos\alpha\, 2\pi r = \frac{2T}{R}\pi r^2.$$

Si le rayon de la calotte est infiniment petit, la surface de la base πr^2 est sensiblement égale à la surface dS de la calotte, et l'on a

$$\int T\,ds\cos\alpha = \frac{2T}{R}dS.$$

Le facteur $\frac{2T}{R}$ représente la résultante normale des tensions superficielles par unité de surface au voisinage du point O; c'est la *pression capillaire* en ce point.

156. Si la surface est de forme quelconque, nous déterminerons de même la résultante des tensions le long d'une courbe infiniment petite AB (*fig.* 44), comprenant le point

Fig. 44.

considéré O. Prenons ce point comme origine des coordonnées, l'axe des z suivant la normale et les axes des x et des y suivant les tangentes aux sections principales.

Pour faciliter le raisonnement, nous considérerons la courbe AB comme engendrée de la manière suivante. Dans le plan des xy, on choisit une courbe fermée arbitraire A_1B_1 renfermant le point O, et l'on trace une courbe semblable $A'B'$, c'est-à-dire telle que les coordonnées x, y et x_1, y_1 de deux

points M' et M_1 situés sur le même rayon vecteur satisfassent à la relation

$$(4)\qquad \frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \lambda;$$

on considère alors sur la surface S la courbe AB, qui a pour projection $A'B'$.

Prenons un point M de la surface, dont les coordonnées sont x, y et z. Désignons respectivement par α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'' les cosinus des angles que font avec les axes : 1° l'élément ds de la courbe AB; 2° la normale N à la surface; 3° la direction de la tension superficielle $T\,ds$.

Ces trois directions étant perpendiculaires entre elles, il en résulte

$$(5)\qquad \frac{\alpha''}{\gamma'\beta - \gamma\beta'} = \frac{\beta''}{\alpha'\gamma - \alpha\gamma'} = \frac{\gamma''}{\beta'\alpha - \beta\alpha'} = 1.$$

On a d'ailleurs

$$(6)\qquad \alpha = \frac{dx}{ds},\quad \beta = \frac{dy}{ds},\quad \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Les projections de la force $T\,ds$ sur les axes sont alors, en tenant compte des équations (5) et (6),

$$(7)\qquad \begin{cases} X\,ds = T\,ds.\alpha'' = T(\gamma'\,dy - \beta'\,dz), \\ Y\,ds = T\,ds.\beta'' = T(\alpha'\,dz - \gamma'\,dx), \\ Z\,ds = T\,ds.\gamma'' = T(\beta'\,dx - \alpha'\,dy). \end{cases}$$

Dans le voisinage du point O, l'équation de la surface peut être mise sous la forme

$$z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2),$$

ou, en appelant R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux,

$$(8)\qquad z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2}\right),$$

d'où l'on déduit

$$(9)\qquad dz = \frac{x}{R_1}\,dx + \frac{y}{R_2}\,dy.$$

Les angles de la normale avec les axes sont alors déterminés par les relations

$$(10)\qquad \frac{\alpha'}{-\frac{x}{R_1}} = \frac{\beta'}{-\frac{y}{R_2}} = \frac{\gamma'}{1} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{R_1}\right)^2+\left(\frac{y}{R_2}\right)^2}}.$$

Supposons maintenant que le facteur λ soit infiniment petit. Les aires planes S' et S_1 enveloppées respectivement par les courbes $A'B'$ et A_1B_1 donnent l'équation

$$S' = \lambda^2 S_1,$$

c'est-à-dire que l'aire S' est un infiniment petit du second ordre. D'autre part, les équations (4) montrent que les coordonnées x et y sont des infiniment petits du premier ordre. En substituant ces valeurs de x et de y dans les équations (10), on voit que le cosinus γ' ne diffère de l'unité que d'une quantité infiniment petite du second ordre. La surface S' enveloppée par la courbe AB ne diffère donc de sa projection S que d'une quantité de l'ordre de $S'(1-\gamma')$, c'est-à-dire d'un infiniment petit du quatrième ordre. Quand on divisera par S les projections de la force $T\,ds$, en faisant ensuite tendre λ vers zéro, on pourra, dans l'expression de ces composantes, négliger les termes infiniment petits du troisième ordre. Comme les cosinus α' et β' sont infiniment petits et dz un infiniment petit du second ordre, on aura

$$X\,ds = T\,dy,$$

$$Y\,ds = -T\,dx,$$

$$Z\,ds = T\left(\frac{x\,dy}{R_1} - \frac{y\,dx}{R_2}\right).$$

L'aire S' a d'ailleurs pour expression

$$S' = \int x\,dy = -\int y\,dx.$$

Si l'on fait la somme des composantes des tensions pour

tout le contour AB, on obtient donc

$$(11)\quad \begin{cases} \int X\,ds = 0, \\ \int Y\,ds = 0, \\ \int Z\,ds = TS'\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = TS\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \end{cases}$$

Ainsi la résultante est normale à la surface et sa valeur par unité de surface est égale à

$$T\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

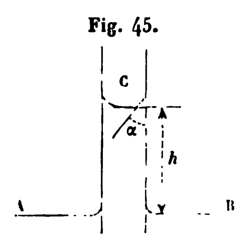
Ce théorème a été démontré par Laplace en partant des actions directes qui s'exercent entre les molécules liquides.

La résultante ainsi obtenue est égale et de signe contraire à la pression capillaire au point O. On vérifierait d'ailleurs aisément que la somme des moments des tensions par rapport à l'un quelconque des trois axes est nulle.

Loi de Jurin.

157. Ces principes permettent d'expliquer aisément la plupart des phénomènes de capillarité. Supposons, par exemple, que l'on plonge dans un liquide un tube de verre cylindrique (*fig.* 45) à section circulaire, de rayon r très petit. Le niveau

Fig. 45.



du liquide dans le tube est plus élevé ou plus bas que la surface plane extérieure, suivant que l'angle α de capillarité est aigu ou obtus, et la surface du liquide dans le tube est sensiblement sphérique. Soient ρ le poids spécifique du liquide, T sa tension capillaire et h l'ascension dans le tube.

Le rayon de courbure de la surface de capillarité est égal à $\frac{r}{\cos\alpha}$, la pression capillaire à $-\frac{2T\cos\alpha}{r}$; pour que la colonne soulevée soit en équilibre, on doit avoir

$$h\rho = \frac{2T\cos\alpha}{r},$$

ou

$$h = \frac{2T\cos\alpha}{r\rho}. \tag{12}$$

On voit que la différence de niveau est en raison inverse du diamètre du tube : c'est la loi de Jurin.

Si l'angle de capillarité α est nul, comme pour l'eau et le verre, on a, plus simplement,

$$h = \frac{2T}{r\rho}. \tag{13}$$

158. Nous avons supposé implicitement que l'expérience est faite dans le vide; mais, en réalité, on doit tenir compte du milieu extérieur. Soient p la pression extérieure sur la surface plane du liquide, p' la pression à la partie inférieure du ménisque et ρ' le poids spécifique du gaz qui forme l'atmosphère; on a

$$p' = p - h\rho'. \tag{14}$$

L'équation d'équilibre devient

$$p = p' + h\rho - \frac{2T\cos\alpha}{r}; \tag{15}$$

on en déduit

$$h = \frac{2T\cos\alpha}{r(\rho - \rho')}. \tag{16}$$

Si la forme de la surface est quelconque, la différence de niveau sera déterminée de même par l'équation

$$h = \frac{T}{\rho - \rho'}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{17}$$

Tension maximum des vapeurs.

159. M. W. Thomson a montré que l'existence des phénomènes capillaires conduit à la conséquence nécessaire que la tension maximum d'une vapeur, à la même température, dépend de la forme de la surface du liquide générateur avec laquelle cette vapeur est en contact.

Supposons que l'expérience précédente (*fig.* 45) soit faite dans le vide, ou du moins sous une cloche dont on aura extrait tout gaz étranger, de sorte qu'il n'y reste plus que de la vapeur. La différence des pressions p et p' de la vapeur sur la surface plane du liquide et dans le tube capillaire est donnée par l'équation (14),

$$p - p' = h\rho'.$$

Lorsque l'équilibre est établi, il se maintient aussi bien par les surfaces d'évaporation que par le liquide lui-même. En effet, si l'équilibre n'existe pas entre le liquide et sa vapeur, il se produit continuellement une évaporation, par exemple dans le tube capillaire, compensée par une condensation sur la surface plane AB. La différence de niveau se rétablit incessamment par la partie inférieure du tube et le travail total de la pesanteur est nul; mais cette distillation continuelle aura pour effet d'absorber de la chaleur sur la surface concave C pour la reporter sur la surface plane; il y aura donc transport continuel de chaleur d'un corps froid sur un corps chaud, sans travail extérieur, ce qui est en contradiction avec le principe de Carnot.

Ainsi la tension maximum de la vapeur produite par un liquide dépend de la forme de la surface. Quand on veut définir la pression normale d'une vapeur saturante, il est donc nécessaire, comme nous l'avons fait aux n°s 41 et 89, de spécifier que la vapeur est en présence d'une surface liquide plane.

Si, dans l'expérience précédente, le tube capillaire étant fermé par le bas, on établit une différence de niveau h' inférieure à h, la pression de la vapeur sur la surface capillaire se trouve supérieure à sa tension maximum; cette vapeur se condense donc dans le tube et il se fait une distillation de dehors en dedans jusqu'à ce que la différence de niveau primi-

tive h soit rétablie. L'inverse aurait lieu si la différence de niveau h' était supérieure à h, et la distillation s'effectuerait en sens contraire. Le même phénomène se produira encore, mais moins rapidement, en présence d'un gaz étranger.

On en déduit cette conséquence remarquable que, lorsque deux vases de forme quelconque situés dans une enceinte fermée contiennent le même liquide, les niveaux tendent à s'établir par évaporation comme ils le feraient si ces deux vases communiquaient entre eux. C'est là une propriété qui joue sans doute un rôle important dans un grand nombre de phénomènes naturels.

160. Pour une surface liquide de forme quelconque en contact avec sa propre vapeur, l'excès de pression $p'-p$ de la vapeur sur la tension normale relative à une surface plane est donnée par les équations (14) et (17),

$$p'-p = \mp \frac{\rho'}{\rho-\rho'} T\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right), \tag{18}$$

le second membre étant pris avec le signe — ou le signe +, suivant que la surface est concave ou convexe.

Cette équation permet d'expliquer les phénomènes que présentent les liquides surchauffés (n° 45).

Considérons un liquide terminé par une surface plane et soumis à une pression extérieure P. En un point M situé dans le liquide à la distance h' du niveau, le pression p_1 a pour valeur

$$p_1 = P + \rho h'.$$

Soit t_1 la température normale de vaporisation sous la pression p_1. On peut porter le liquide en ce point M à une température t plus élevée que t_1, sans production de vapeur, c'est-à-dire sans que l'ébullition commence. Supposons, en effet, qu'il s'y forme une bulle sphérique de vapeur de rayon R, et soit p la pression normale à la température t. La pression maximum exercée par la vapeur sur la surface concave du liquide est, d'après l'équation (18),

$$p' = p - \frac{2\rho' T}{(\rho-\rho')R}. \tag{19}$$

Pour que cette bulle subsiste, il est nécessaire que la pression de la vapeur soit égale ou supérieure à celle du liquide environnant, c'est-à-dire qu'on ait

$$p - \frac{2\rho' T}{(\rho-\rho')R} \geqq p_1,$$

ou, en posant

$$R_1 = \frac{2\rho' T}{(\rho-\rho')(p-p_1)},$$

$$R \geqq R_1.$$

Si l'on a $R < R_1$, il en résulte $p' < p_1$: la vapeur se condense et la bulle disparaît.

Ainsi, tant qu'il ne se forme pas en ce point M de bulle de vapeur dont le rayon soit égal ou supérieur à R_1, l'ébullition n'a pas lieu. Mais si, par une cause quelconque, une bulle de vapeur de rayon supérieur à R_1 s'y produit, cette bulle grandit brusquement et l'ébullition se fait par soubresauts.

Si le rayon limite R_1 est très petit, la différence des pressions $p - p_1$ peut être très grande et la température du liquide très élevée au-dessus de la température normale. L'état du liquide est représenté alors par la portion AG (*fig.* 7, n° 43) de la courbe de M. James Thomson.

Des bulles d'un gaz quelconque attachées aux parois ou situées dans l'intérieur du liquide produisent un effet analogue et rendent l'ébullition plus régulière, parce qu'elles servent de point de départ pour la formation des bulles de vapeur. M. Gernez a étudié ce phénomène dans les conditions les plus variées.

161. De même, un espace renfermant de la vapeur peut être refroidi à une température inférieure à celle qui correspond à la tension normale de la vapeur, sans qu'il se produise aucune condensation (n° 44). En d'autres termes, la vapeur à une température t peut être amenée à une pression p_2, supérieure à la pression normale; l'espace est sursaturé et l'état de la vapeur est représenté par la portion BH (*fig.* 7) de la courbe de M. James Thomson.

Supposons en effet qu'il se forme une gouttelette liquide de

rayon R, la pression maximum de la vapeur au contact de la surface liquide convexe est

$$(20) \qquad p' = p + \frac{2\rho' T}{(\rho - \rho')R}.$$

Pour que cette gouttelette subsiste, il faut que la pression p' soit moindre que la pression extérieure.

Posons encore

$$R_2 = \frac{2\rho' T}{(\rho - \rho')(p_2 - p)}.$$

Si le rayon de la goutte est inférieur à R_2, la pression p_2 de la vapeur extérieure est moindre que celle qui correspond à la forme de la gouttelette et celle-ci se vaporise. Au contraire, s'il se forme, par une cause quelconque, une gouttelette d'un rayon plus grand que R_2, la vapeur environnante se condense et, comme l'équilibre relatif au rayon R_2 est instable, il se produit une liquéfaction brusque de la vapeur.

Lorsqu'un espace limite tient en suspension des gouttelettes d'eau de différentes dimensions, on voit que les plus petites ont une tendance à s'évaporer, et les plus grosses à augmenter de volume, jusqu'à ce qu'il s'établisse un état d'équilibre dans lequel toutes les gouttes auront le même diamètre. Des traces de poussière ou de petites gouttelettes introduites dans un air chargé de vapeur d'eau peuvent ainsi servir de germes à la formation des gouttes et provoquer une condensation abondante. Ce phénomène intervient sans doute pour une part importante dans la formation des nuages et des brouillards. Il présente encore la plus grande analogie avec ceux de surfusion ou de sursaturation des liquides, qui s'expliquent probablement aussi par des actions capillaires de même nature.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉLECTRICITÉ.

CHAPITRE I.

ÉLECTROSTATIQUE.

Loi de Coulomb. — Définition du potentiel. — Surfaces de niveau. — Potentiel d'une couche sphérique homogène. — Cas où le point attiré est situé à l'intérieur de la masse agissante. — Propagation de la force. — Théorèmes généraux. — Équilibre électrique dans un système de corps parfaitement conducteurs. — Électrisation par influence. — Distribution de l'électricité sur une sphère et sur un ellipsoïde.

Loi de Coulomb.

162. Pour énoncer la loi des attractions et des répulsions lectriques, on a imaginé deux fluides que l'on suppose rénndus d'une manière continue dans les corps. Un corps n'est s électrisé lorsque chaque élément de volume contient des antités égales des deux fluides : le corps est électrisé lorsque n des fluides est en excès; cette différence constitue ce 'on appelle l'*électricité libre* dans le corps. L'action mutuelle deux masses infiniment petites m, m' d'électricité libre est force dirigée suivant la droite qui les joint; elle est résive ou attractive suivant que les deux masses électriques de même espèce ou d'espèces contraires; elle varie en n inverse du carré de la distance r : on peut donc la rénter par la formule

$$-\frac{mm'}{r^2},$$

en regardant la force comme positive ou négative suivant qu'elle est attractive ou répulsive, et prenant pour unité de masse électrique une masse telle, qu'une masse égale et de signe contraire, placée à l'unité de distance, exerce sur elle une attraction égale à l'unité. Telle est la loi de Coulomb, qui comprend, comme nous le verrons, l'ensemble des phénomènes d'électricité statique.

163. Considérons une masse électrique infiniment petite m, soumise à l'action de plusieurs masses infiniment petites m', m'', ... Appelons x, y, z les coordonnées du point P où se trouve la masse m; x', y', z' celles de la masse m', ...; la résultante des actions exercées sur la masse m par les autres masses a pour projections sur les trois axes des coordonnées

$$X = -m\sum\frac{m'(x'-x)}{r^3},$$

$$Y = -m\sum\frac{m'(y'-y)}{r^3},$$

$$Z = -m\sum\frac{m'(z'-z)}{r^3}.$$

Si l'on suppose la masse m égale à l'unité, ces formules deviennent

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= -\sum\frac{m'(x'-x)}{r^3},\\ Y &= -\sum\frac{m'(y'-y)}{r^3},\\ Z &= -\sum\frac{m'(z'-z)}{r^3}.\end{aligned}\right.$$

Elles représentent l'action exercée par un système de corps électrisés sur une masse 1 d'électricité positive, placée en un point P, ou plus simplement la *force électrique* au point P. Il suffit évidemment de tenir compte de l'électricité libre; car une certaine quantité de fluide neutre, étant la réunion de deux masses égales $+m'$ et $-m'$ d'électricités contraires, n'exerce aucune action sur le point P.

Définition du potentiel.

164. Comme on a

$$r^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2,$$

les trois sommes précédentes sont des fonctions des trois coordonnées du point P. On peut les ramener à une même somme

$$(2) \qquad V = \sum \frac{m'}{r}.$$

On a, en effet, en différentiant par rapport à la variable x,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x'-x}{r}, \quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x'-x}{r^3},$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \sum \frac{m'(x'-x)}{r^3}.$$

On a de même, en différentiant par rapport aux variables y et z,

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \sum \frac{m'(y'-y)}{r^3}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \sum \frac{m'(z'-z)}{r^3}.$$

On en déduit les égalités

$$(3) \qquad X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Ainsi les composantes de la force électrique produite au point P par l'ensemble des corps électrisés sont les dérivées partielles, prises en signes contraires, d'une certaine fonction des coordonnées du point P. Cette fonction V est ce qu'on appelle le *potentiel* au point P des masses électriques données.

Surfaces de niveau.

165. On appelle *surface de niveau* le lieu des points pour lesquels le potentiel V a une même valeur. Par le point P passe une surface de niveau, et une seule, et il est facile de

voir que la force qui s'exerce en ce point est normale à la surface de niveau. On sait, en effet, que la normale à cette surface au point P fait avec les axes des coordonnées des angles dont les cosinus sont proportionnels aux dérivées partielles

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z},$$

et par conséquent proportionnels aux composantes X, Y, Z de la force. On en conclut que la force est dirigée suivant la normale à la surface.

Soit dn la portion de normale comprise entre deux surfaces de niveau infiniment voisines V et $V + dV$, et supposons que l'axe des x coïncide avec la normale; on a

$$F = X = -\frac{dV}{dn}.$$

Ainsi la force qui s'exerce en un point P est égale à la dérivée du potentiel par rapport à la normale à la surface de niveau passant par le point P, et cette force est dirigée du côté vers lequel le potentiel diminue.

On appelle *ligne de force* une ligne normale en chacun de ses points à la surface de niveau qui passe en ce point, ou, ce qui est la même chose, une ligne telle que la tangente en chacun de ses points soit dirigée suivant la force qui agit en ce point. Les lignes de force sont les lignes orthogonales aux surfaces de niveau. Dans la formule précédente, dn désigne un élément d'une ligne de force.

Potentiel d'une couche sphérique homogène.

166. Considérons une couche homogène comprise entre deux sphères de rayons a et $a + da$, ayant même centre O; appelons ρ la distance OP, θ l'angle que fait avec la droite OP le rayon qui va du centre à un point quelconque M de la couche, et φ l'angle que fait le plan POM avec un plan fixe passant par OP. L'élément de volume ayant pour expression

$$dv = a^2 \sin\theta \, da \, d\theta \, d\varphi,$$

si l'on désigne par k la densité de l'électricité libre, on aura

$$m' = k\,dv = ka^2 \sin\theta\, da\, d\theta\, d\varphi,$$

et, par suite,

$$V = ka^2 da \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{r}\, d\theta\, d\varphi = 2\pi k a^2 da \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{r}.$$

De la relation

$$r^2 = a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos\theta$$

on déduit

$$r\,dr = a\rho \sin\theta\, d\theta;$$

si l'on remplace la variable θ par la variable r, il vient

$$V = \frac{2\pi k a\, da}{\rho}\int dr.$$

Il y a ici deux cas à distinguer, suivant que le point P est à l'extérieur de la couche sphérique ou à l'intérieur de la sphère a. Dans le premier cas, les limites de l'intégration sont $\rho - a$ et $\rho + a$, et l'on a

$$\int_{\rho-a}^{\rho+a} dr = 2a, \quad V = \frac{4\pi k a^2 da}{\rho} = \frac{M}{\rho},$$

en désignant par M la masse de la couche. Le potentiel de la couche sphérique, agissant sur un point extérieur, est le même que si la masse de la couche était concentrée en son centre. Dans le second cas, les limites sont $a - \rho$ et $a + \rho$, et l'on a

$$\int_{a-\rho}^{a+\rho} dr = 2\rho, \quad V = 4\pi k a\, da = \frac{M}{a}.$$

Le potentiel de la couche sphérique, agissant sur un point intérieur P, est constant, c'est-à-dire indépendant de la position du point P; on en déduit que la force est nulle.

Pour une sphère composée de couches concentriques homogènes, le potentiel en un point extérieur P, situé à une distance r du centre, est encore le même que si toute la masse était concentrée au centre; le potentiel et la force ont pour expressions

$$V = \frac{M}{r}, \quad F = \frac{M}{r^2},$$

et les projections de la force sur des axes passant par le centre de la sphère sont

$$X = \frac{Mx}{r^3}, \quad Y = \frac{My}{r^3}, \quad Z = \frac{Mz}{r^3}.$$

Considérons maintenant une sphère homogène de rayon a, agissant sur un point P situé dans la sphère même et à une distance ρ du centre; on peut regarder la sphère comme composée de couches homogènes concentriques. Les couches dont le rayon est moindre que ρ, agissant sur un point extérieur P, donnent un potentiel égal à

$$\frac{4\pi k}{\rho}\int_0^\rho a^2\,da = \frac{4\pi k \rho^2}{3};$$

celles dont le rayon est plus grand que ρ, agissant sur un point intérieur, donnent un potentiel égal à

$$4\pi k \int_\rho^a a\,da = 2\pi k(a^2 - \rho^2).$$

Le potentiel de la sphère entière est donc

$$V = 2\pi k\left(a^2 - \frac{\rho^2}{3}\right).$$

Si l'on veut calculer l'action de cette sphère sur le point P, on remarquera que les couches dont le rayon est supérieur à ρ n'exercent aucune action sur le point P, et que les couches dont le rayon est inférieur à ρ agissent comme si elles étaient concentrées au centre O; la résultante est une force égale à

$$F = \frac{4}{3}\pi k \rho,$$

dirigée suivant la droite OP; ses projections sur des axes passant par le point O sont

$$X = \frac{4}{3}\pi k x, \quad Y = \frac{4}{3}\pi k y, \quad Z = \frac{4}{3}\pi k z;$$

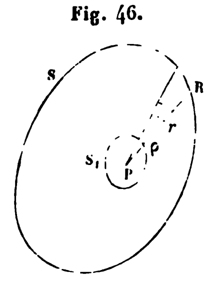
on voit qu'elles sont égales et de signes contraires aux dérivées partielles du potentiel.

Cas où le point attiré est situé à l'intérieur de la masse agissante.

167. On a supposé plus haut que l'électricité est répandue d'une manière continue dans les corps électrisés, et représenté la quantité d'électricité libre m' contenue dans le volume dv par $k\,dv$, en désignant par k la densité électrique dans cet élément de volume. Les sommes qui expriment le potentiel et les composantes de l'action électrique deviennent alors des intégrales définies s'étendant aux volumes des corps électrisés. Tant que le point P est à l'extérieur des corps électrisés, la distance r de chacune des masses agissantes m' à ce point P étant différente de zéro, les sommes ont des valeurs parfaitement déterminées; ce sont des fonctions continues des coordonnées du point P, satisfaisant aux relations (3). Mais, lorsque le point P est situé à l'intérieur de l'un des corps électrisés, la distance à ce point des masses électriques voisines devenant infiniment petite, il y a lieu d'examiner si les intégrales conservent toujours des valeurs finies et déterminées, en d'autres termes si l'hypothèse de la distribution continue de l'électricité est permise.

Imaginons une sphère décrite du point P comme centre

Fig. 46.



avec un rayon égal à l'unité et considérons le cône qui a pour sommet le point P et pour base un élément $d\omega$ de la surface de cette sphère; deux sphères décrites du point P comme centre, avec des rayons r et $r+dr$, découpent dans le cône un élément de volume $dv = r^2\,d\omega\,dr$; la quantité d'électricité libre m', contenue dans cet élément de volume, est $kr^2\,d\omega\,dr$, la densité k étant elle-même une fonction des coordonnées.

Concevons une surface fermée et convexe très petite S_1 enveloppant le point P (*fig.* 46), et appelons ρ et R les distances du point P aux points où un rayon mené par le point P rencontre la surface S_1 et la surface extérieure S du corps électrisé dans lequel est situé le point P. Le potentiel en P de la quantité d'électricité située dans le volume compris entre les deux surfaces S et S_1 est

$$\sum \frac{m'}{r} = \sum d\omega \int_\rho^R kr\,dr.$$

Quand la surface S_1 diminue indéfiniment, c'est-à-dire quand le rayon ρ tend vers zéro, l'intégrale simple

$$\int_\rho^R kr\,dr$$

tendant vers une limite déterminée,

$$\int_0^R kr\,dr,$$

l'intégrale triple tend elle-même vers une limite déterminée,

$$\text{(4)} \qquad V = \sum d\omega \int_0^R kr\,dr;$$

c'est ce qu'on appellera le potentiel au point P de la masse entière enveloppée par la surface S.

Si l'on désigne par α, β, γ les cosinus des angles que fait le rayon R mené par le point P avec les axes des coordonnées, les sommes des projections sur ces axes des attractions exercées sur le point P par les masses électriques comprises entre les deux surfaces S et S_1 ont pour expression

$$-\sum \frac{m'\alpha}{r^2} = -\sum \alpha\,d\omega \int_\rho^R k\,dr,$$

$$-\sum \frac{m'\beta}{r^2} = -\sum \beta\,d\omega \int_\rho^R k\,dr,$$

$$-\sum \frac{m'\gamma}{r^2} = -\sum \gamma\,d\omega \int_\rho^R k\,dr;$$

es tendent aussi vers des limites finies et déterminées,

$$
)\qquad \left\{
\begin{aligned}
X &= -\sum \alpha\, d\omega \int_0^R k\, dr,\\
Y &= -\sum \beta\, d\omega \int_0^R k\, dr,\\
Z &= -\sum \gamma\, d\omega \int_0^R k\, dr,
\end{aligned}
\right.
$$

ıand la surface S_1 diminue indéfiniment. Ce sont les compontes de l'action exercée sur le point P par la masse entière veloppée par la surface S.

168. Si l'on appelle V_1 le potentiel au point P de la masse veloppée par la surface S_1, V_2 le potentiel de la masse comise entre les deux surfaces S_1 et S, et de même X_1, Y_1, Z_1 s composantes de l'action de la première masse sur le int P, X_2, Y_2, Z_2 celles de l'action de la seconde masse sur même point, on a

$$
{}_1 = \sum d\omega \int_0^\rho kr\, dr, \quad V_2 = \sum d\omega \int_\rho^R kr\, dr, \quad V = V_1 + V_2,
$$

$$
= -\sum \alpha\, d\omega \int_0^\rho k\, dr, \quad X_2 = -\sum \alpha\, d\omega \int_\rho^R k\, dr, \quad X = X_1 + X_2,
$$

. . . .

. . . .

La masse agissante qui environne le point P n'introduit dans intégrales V, X, Y, Z, malgré la petitesse de la distance r, e des quantités infiniment petites. Car, si l'on regarde ρ mme une quantité infiniment petite du premier ordre, on marque que la masse agissante enveloppée par la surface S_1, qui est une quantité infiniment petite du troisième ordre, troduit dans le potentiel une quantité infiniment petite V_1 du cond ordre et dans les composantes de la force des quanés infiniment petites X_1, Y_1, Z_1, qui sont au moins du preier ordre.

On déduit de là que le potentiel V, ainsi que les compo-

santes X, Y, Z de la force, représentés par les formules (4) et (5), sont des fonctions continues de la position du point P. Considérons en effet un point P' voisin du point P, et situé comme lui à l'intérieur de la surface S_1; désignons par V'_1 le potentiel au point P' de la masse enveloppée par la surface S_1 et par V'_2 le potentiel au même point de la masse comprise entre les deux surfaces S_1 et S; on a

$$V' - V = (V'_2 - V_2) + (V'_1 - V_1).$$

On peut prendre la surface S_1 assez petite pour que le potentiel de la masse enveloppée par cette surface en un point intérieur quelconque soit moindre qu'une quantité donnée $\frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, le potentiel V_2 de la masse comprise entre les surfaces S et S_1 en un point extérieur à cette masse étant une fonction continue de la position de ce point, on peut assigner une distance telle que pour tous les points P' situés à une distance moindre de P, la différence $V'_2 - V_2$ soit plus petite que $\frac{\varepsilon}{2}$; pour tous ces points, la différence $V' - V$ sera donc moindre que la quantité donnée ε. On en conclut que le potentiel V est une fonction continue des coordonnées x, y, z du point P, même quand ce point est situé à l'intérieur de la masse agissante. On démontrerait de la même manière que les composantes X, Y, Z de la force jouissent de la même propriété.

169. Il nous reste à faire voir que les composantes de la force sont encore égales et de signes contraires aux dérivées partielles du potentiel.

Le point P étant extérieur à la masse comprise entre les surfaces S et S_1, les dérivées partielles du potentiel V_2 sont égales aux composantes X_2, Y_2, Z_2 de l'action exercée par cette masse sur le point P; on a donc, en désignant par ε' une quantité qui s'évanouit avec δx,

$$\frac{V'_2 - V_2}{\delta x} = - X_2 + \varepsilon'.$$

De l'égalité

$$V' - V = (V'_2 - V_2) + (V'_1 - V_1),$$

on déduit

$$\frac{V'-V}{\delta x} = -X_2 + \varepsilon' + \frac{V'_1 - V_1}{\delta x}$$

et, par suite,

$$\frac{V'-V}{\delta x} = -X + X_1 + \varepsilon' + \frac{V'_1 - V_1}{\delta x}.$$

Nous allons prouver que le dernier rapport tend vers zéro.

Supposons que la surface S_1 soit une sphère décrite du point P comme centre avec le rayon ρ; les valeurs V_1 et V'_1 du potentiel de la masse intérieure en P et P', étant des quantités petites du second ordre par rapport au rayon ρ, peuvent être représentées par $\mu\rho^2$ et $\mu'\rho^2$, μ et μ' étant des quantités finies. La distance PP', plus petite que ρ, peut être représentée par $\theta\rho$, θ étant un nombre fixe inférieur à l'unité; en désignant par α' le cosinus de l'angle qu'elle fait avec l'axe des x, sa projection δx sur cet axe sera $\alpha'\theta\rho$. Il en résulte que le rapport

$$\frac{V'_1 - V_1}{\delta x} = \frac{(\mu' - \mu)\rho}{\alpha'\theta}$$

est une quantité infiniment petite. D'autre part, la composante X_1 de l'action de la masse intérieure est aussi une quantité infiniment petite. On en conclut que le rapport $\frac{V'-V}{\delta x}$ tend vers une limite égale à $-X$, quand ρ tend vers zéro, c'est-à-dire que la fonction potentiel V a une dérivée partielle par rapport à x, et que cette dérivée est égale et de signe contraire à la composante X de la force.

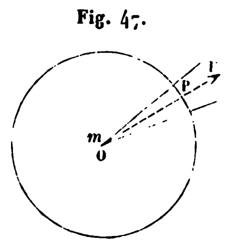
Ainsi les propriétés du potentiel subsistent quand le point P est à l'intérieur de l'un des corps électrisés; cette fonction des coordonnées x, y, z du point P reste finie et continue et ses dérivées partielles sont encore égales et de signes contraires aux composantes de la force.

Propagation de la force.

170. Supposons qu'une masse électrique m soit placée en O (*fig.* 47). Considérons la sphère décrite du point O comme centre avec un rayon égal à r et imaginons que sur la surface

de cette sphère soit répandue une couche uniforme et infiniment mince d'électricité positive, de manière que chaque unité de surface en contienne une quantité égale à l'unité. Un cône infiniment petit $d\omega$ découpe sur la surface de cette sphère un élément $d\sigma$ égal à $r^2 d\omega$, et sur lequel on suppose répandue une quantité $d\sigma$ d'électricité positive. La force électrique (nº 163) $F = \frac{m}{r^2}$ exercée par la masse m en un point P de l'élément $d\sigma$ est dirigée suivant le prolongement de la droite OP, ou au contraire de P vers O, suivant que la masse

Fig. 47.



électrique m est positive ou négative. La force $F d\sigma$ exercée par la masse m sur l'élément $d\sigma$ aura même direction et même sens, et l'on dira que l'élément de surface $d\sigma$ est traversé par une quantité de force égale à $F d\sigma$, dans le sens de la force. Cette quantité de force $F d\sigma$, étant égale à $m\, d\omega$, est indépendante de la distance r; on dira que dans le cône $d\omega$ se propage une quantité de force constante égale à $m\, d\omega$. Cette propagation de la force se fait dans le sens OP, c'est-à-dire en s'éloignant du sommet, si la masse électrique m est positive, ou au contraire en se rapprochant du sommet si la masse m est négative. Elle est analogue à la propagation de la chaleur ou de la lumière par ondes sphériques émanant d'un centre d'émission, ou au contraire convergeant vers un centre d'absorption. Il en résulte que la quantité de force dégagée ou absorbée par la masse électrique m dans toutes les directions est égale à $4\pi m$.

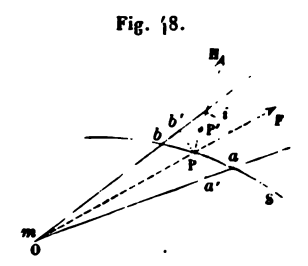
171. Considérons maintenant une surface S quelconque (fig. 48). Le cône $d\omega$ découpe sur cette surface un élément menons la normale PH en un point P de cet élément et

désignons par i l'angle qu'elle fait avec la force électrique F exercée par la masse m au point P. Le cône $d\omega$ découpe sur la sphère de rayon OP un élément $d\sigma'$. La quantité de force qui traverse l'élément $d\sigma = ab$ est égale à celle qui traverse l'élément $d\sigma' = a'b'$, ou qui se propage dans le cône $d\omega$; comme on a

$$m\,d\omega = \frac{m\,d\sigma'}{r^2} = \frac{m\,d\sigma \cos i}{r^2} = \mathrm{F}\,d\sigma.\cos i,$$

cette quantité de force est égale à la projection sur la normale PH de la force F$d\sigma$ qui agit sur l'élément $d\sigma$.

Fig. 48.



Supposons actuellement qu'il y ait plusieurs masses agissantes m, m', m'', ..., distribuées d'une manière quelconque dans l'espace. La somme algébrique des quantités de force qui traversent l'élément de surface $d\sigma$ est égale à la somme algébrique des projections sur la normale PH à cet élément des forces telles que F $d\sigma$ qui agissent sur lui, ou à la projection de leur résultante. Mais on sait que la somme des projections sur un axe quelconque pris pour axe des x des actions exercées par un système de masses électriques sur une masse $+1$ placée en P, ou la projection de la force électrique du système, est égale à $-\frac{\partial V}{\partial x}\cdot$ Si l'on suppose l'axe dirigé suivant la normale PH à l'élément $d\sigma$, et si l'on désigne par dn un élément PP' de cette normale, la somme des projections des forces F sur la normale PH est égale à $-\frac{dV}{dn}$, et celle des forces F $d\sigma$ à

Telle est l'expression analytique de la somme algébrique des quantités de force qui traversent l'élément de surface $d\sigma$.

Théorèmes généraux.

Théorème I.

172. *La somme algébrique des quantités de force qui traversent la surface qui enveloppe un volume est égale à la somme algébrique des masses agissantes situées dans ce volume multipliée par* 4π.

Nous regarderons les quantités de force qui sortent du volume comme positives, celles qui entrent comme négatives.

Considérons d'abord le cas où il n'y a qu'une masse agissante m et supposons la surface convexe.

Lorsque la masse m est située à l'intérieur (*fig.* 49), chaque cône infiniment petit $d\omega$, ayant pour sommet le point m, découpe sur la surface un élément ab que traverse une quantité de force égale en grandeur et en signe à $m\,d\omega$; la somme des

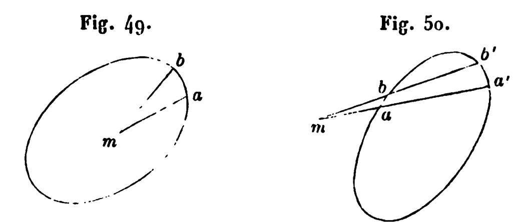


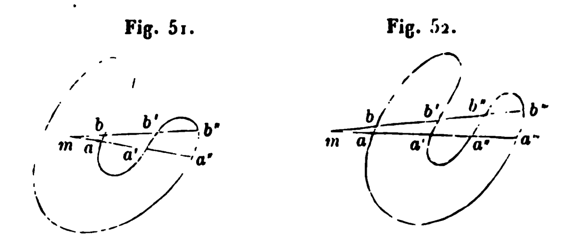
Fig. 49. Fig. 50.

quantités de force qui traversent la surface entière est égale à $4\pi m$. Quand la masse m est située à l'extérieur (*fig.* 50), un cône $d\omega$ découpe sur la surface deux éléments ab et $a'b'$; par le premier entre une quantité de force égale à $m\,d\omega$, par le second sort une quantité égale, ou inversement; la somme algébrique de ces deux quantités égales et de signes contraires étant égale à zéro, la somme algébrique des quantités de force qui traversent la surface entière est égale à zéro.

Ces résultats sont vrais, quelle que soit la forme de la surface. Lorsque la masse m est à l'intérieur, un cône $d\omega$ peut découper sur la surface un nombre impair d'éléments, par

nple trois éléments ab, $a'b'$, $a''b''$ (*fig.* 51), qui sont tra-
-és par la même quantité de force $m\,d\omega$; si la masse m est
tive, cette quantité sort par le premier, rentre par le second
ort par le troisième; la somme algébrique des quantités de
e qui traversent ces trois éléments est égale à $m\,d\omega$, ce qui
ne toujours pour la surface entière $4\pi m$. Quand la masse
st située à l'extérieur, le cône découpe sur la surface un
ıbre pair d'éléments, par exemple quatre éléments ab,

Fig. 51. Fig. 52.



$a''b''$, $a'''b'''$ (*fig.* 52), qui sont traversés par la même
ntité de force $m\,d\omega$; si la masse m est positive, cette quan-
entre par le premier, sort par le second, rentre par le troi-
ıe et sort par le quatrième; la somme algébrique est nulle.
ıpposons maintenant qu'il y ait un nombre quelconque de
ses agissantes m, m', m'', ..., placées les unes à l'inté-
r, les autres à l'extérieur. Chacune de ces dernières donne
somme nulle; chacune des premières donne une somme
e à la masse elle-même, multipliée par 4π. La somme al-
·ique de toutes les quantités de force qui traversent la
ace est donc égale à la somme algébrique des masses inté-
res multipliée par 4π.

enons la normale à chaque élément $d\sigma$ de la surface vers
·érieur. D'après la formule (6), la somme algébrique des
ntités de force qui traversent cet élément étant égale à
$\frac{dV}{dn}\,d\sigma$, la somme algébrique des quantités de force qui tra-
ent la surface entière est $-\sum \frac{dV}{dn}\,d\sigma$. Si donc on désigne
M la somme algébrique des masses intérieures, on a

$$-\sum \frac{dV}{dn}\,d\sigma = 4\pi M.$$

173. Corollaire. — *Le potentiel n'a ni maximum ni minimum en dehors des masses agissantes.*

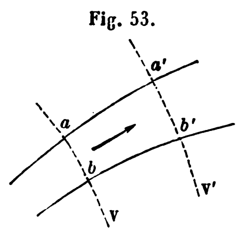
Du point P comme centre avec un rayon très petit, décrivons une sphère. Si le potentiel avait en P une valeur maximum, c'est-à-dire décroissait quand on s'éloigne du point P dans certaines directions sans croître dans aucune, la dérivée $\frac{dV}{dn}$ aurait une valeur négative ou nulle en tous les points de la surface de la sphère, et par conséquent le premier membre de l'équation (7) aurait une valeur positive; il y aurait en P une masse agissante positive. On verrait de même que, si le potentiel avait en P une valeur minimum, il y aurait en ce point une masse agissante négative.

Théorème II (Chasles).

174. *La quantité de force qui se propage dans un canal orthogonal aux surfaces de niveau qui ne contiennent aucune masse agissante est constante.*

Soient ab et $a'b'$ les sections du canal par deux surfaces de niveau V et V′ (*fig.* 53). Appliquons le théorème I au volume

Fig. 53.



enveloppé par la surface latérale du canal et les deux portions ab, $a'b'$ des surfaces de niveau.

Ce volume ne comprenant par hypothèse aucune masse agissante, la somme algébrique des quantités de force qui traversent sa surface est nulle. Si l'on considère un élément de la surface latérale du canal, la résultante des forces qui agissent sur lui étant tangente à cette surface, sa projection sur la normale à l'élément est nulle, et, par conséquent, la quantité de force qui le traverse est nulle (n° 171). Ainsi la quantité de

force qui traverse la surface latérale du canal est nulle. La somme totale étant nulle, on en conclut que les quantités de force qui traversent les deux sections ab et $a'b'$ sont égales et de signes contraires, c'est-à-dire que la quantité de force qui entre dans le volume par l'une des sections est égale à celle qui en sort par l'autre.

Si le potentiel décroît de V à V', la propagation de la force se fait de a vers a'; la même quantité de force traverse les deux sections ab, $a'b'$, dans le sens de la flèche. On peut énoncer ce résultat en disant que dans tout tube orthogonal aux surfaces de niveau se propage un *flux* de force, qui conserve une valeur constante, tant que le tube ne rencontre aucune masse agissante.

THÉORÈME III (Poisson).

175. *La valeur de la fonction*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

en un point quelconque P *est égale à la densité électrique en ce point multipliée par* -4π.

Pour démontrer ce théorème, nous nous servirons d'une formule connue sous le nom de *formule de Green*. Soient U et V deux fonctions finies et continues de x, y, z dans un certain volume, et posons, pour abréger,

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Si l'on appelle dv un élément du volume, $d\sigma$ un élément de la surface qui l'enveloppe, dn un élément de la normale à cet élément de surface vers l'extérieur, on a

$$\sum (U\,\Delta V - V\,\Delta U)\,dv = \sum \left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right)d\sigma;$$

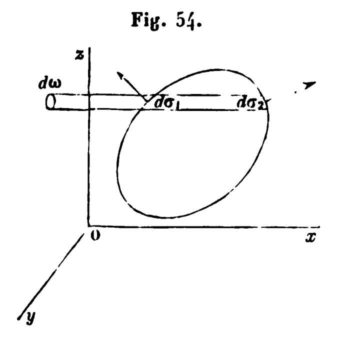
la première somme s'étend au volume considéré, la seconde à la surface S qui l'enveloppe.

On a d'abord

$$U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - V\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(U\frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial x}.$$

Appelons $d\sigma$ un élément de surface, α, β et γ les cosinus des angles que fait avec les axes la normale comptée vers l'extérieur. Considérons un cylindre infiniment mince parallèle à l'axe des x, de section $d\omega$ (*fig.* 54), qui découpe sur la surface

Fig. 54.



en deux points dont les abscisses sont x_1 et x_2 des éléments de surface $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$, et où les normales font avec l'axe des x des angles dont les cosinus sont α_1 et α_2; on a

$$d\omega = -\alpha_1\, d\sigma_1 = \alpha_2\, d\sigma_2.$$

En étendant l'expression précédente au volume total, il vient

$$\sum\left(U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - V\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)dv = \sum d\omega\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial\left(U\frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial x}dx$$

$$= \sum\left[\left(U\frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{\partial U}{\partial x}\right)_2 d\omega - \left(U\frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{\partial U}{\partial x}\right)_1 d\omega\right]$$

$$= \sum\left[\left(U\frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{\partial U}{\partial x}\right)_2 \alpha_2\, d\sigma_2 + \left(U\frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{\partial U}{\partial x}\right)_1 \alpha_1\, d\sigma_1\right]$$

$$= \sum\left(U\frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{\partial U}{\partial x}\right)\alpha\, d\sigma.$$

Les autres coordonnées donneront de même

$$\sum\left(U\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - V\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)dv = \sum\left(U\frac{\partial V}{\partial y} - V\frac{\partial U}{\partial y}\right)\beta\, d\sigma,$$

$$\sum\left(U\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - V\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)dv = \sum\left(U\frac{\partial V}{\partial z} - V\frac{\partial U}{\partial z}\right)\gamma\, d\sigma.$$

outant les trois équations membre à membre, il vient

$$\sum(U\,\Delta V - V\,\Delta U)\,dv = \sum\left[\begin{array}{l} U\left(\frac{\partial V}{\partial x}\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\gamma\right) \\ -V\left(\frac{\partial U}{\partial x}\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\gamma\right)\end{array}\right]d\sigma.$$

D'autre part, la variation de la fonction V sur l'élément dn normale est

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz,$$

où

$$\frac{dV}{dn} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dn} = \frac{\partial V}{\partial x}\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\gamma.$$

La fonction U donnerait une expression analogue; en substituant, on obtient la formule de Green

$$\sum(U\,\Delta V - V\,\Delta U)\,dv = \sum\left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right)d\sigma.$$

Le premier membre est une intégrale triple s'étendant à un lume quelconque, le second membre une intégrale double étendant à la surface qui enveloppe ce volume.

176. Corollaire. — Si U et V sont des fonctions continues x et y, et si l'on pose

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2},$$

a de même

$$\sum(U\,\Delta V - V\,\Delta U)\,d\omega = \sum\left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right)ds.$$

Le premier membre est une intégrale double s'étendant à

une aire plane quelconque ω, le second membre est une intégrale simple s'étendant au contour s de cette aire.

177. Supposons que la fonction U soit une constante et que la fonction V soit le potentiel d'un système de masses électriques; la formule de Green se réduit à

$$\sum \Delta V \, dv = \sum \frac{dV}{dn} \, d\sigma.$$

Mais, en vertu de l'équation (7), la dernière somme est égale à $-4\pi M$, M étant la quantité d'électricité située dans le volume, ou à $-4\pi \sum k \, dv$; on a donc, pour un volume quelconque,

$$\sum (\Delta V + 4\pi k) \, dv = 0.$$

Appliquons maintenant cette expression à un volume infiniment petit en un point P; on aura, en ce point,

$$\Delta V + 4\pi k = 0$$

ou

$$\Delta V = -4\pi k. \tag{8}$$

178. *Remarque.* — Lorsque le point P est situé en dehors des masses agissantes, la densité électrique k étant nulle en ce point, la fonction ΔV est elle-même nulle. Ainsi la fonction ΔV est nulle dans tout l'espace extérieur aux masses agissantes. C'est ce qu'il est facile de vérifier directement; en différentiant une seconde fois par rapport à x l'expression

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \sum \frac{m'(x'-x)}{r^3}$$

trouvée au n° 163, on a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \sum m'\left(-\frac{1}{r^3} - 3\,\frac{x'-x}{r^4}\,\frac{\partial r}{\partial x}\right) = \sum m'\left[-\frac{1}{r^3} + 3\,\frac{(x'-x)^2}{r^5}\right]$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \sum m'\left(-\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3}\right) = 0.$$

Mais, quand le point P est à l'intérieur des masses agissantes, la distance r des masses voisines est infiniment petite. On ne peut plus différentier sous le signe $\sum$ et la fonction ΔV n'est plus nulle.

Équilibre électrique dans un système de corps parfaitement conducteurs.

Théorème IV.

179. *Il n'y a pas d'électricité libre à l'intérieur des corps conducteurs.*

Un corps bon conducteur est un corps qui n'oppose aucune résistance au mouvement de l'électricité. Considérons un système formé de masses électriques isolées et de corps conducteurs chargés de quantités électriques données. Appelons V le potentiel de tout le système en un point P quelconque. Pour l'équilibre électrique, il est nécessaire et il suffit que le potentiel ait une valeur constante à l'intérieur de chacun des corps conducteurs; car si le potentiel avait une valeur variable dans l'un d'eux, une masse m d'électricité libre située dans le corps serait sollicitée par une force égale à $-m\frac{dV}{dn}$, et se mouvrait dans la direction de cette force. D'autre part, les deux quantités $+m$ et $-m$ d'électricités contraires, qui forment une masse infiniment petite de fluide neutre, étant sollicitées par deux forces égales et contraires, se mouvraient en sens opposés, et le fluide neutre serait décomposé. Ainsi le potentiel de tout le système doit avoir une valeur constante V_1 dans l'un des conducteurs, une autre valeur constante V_2 dans un second, etc. Il est évident, d'ailleurs, que cette condition est suffisante. Le potentiel est variable dans l'espace isolant qui sépare les corps les uns des autres.

Le potentiel ayant une valeur constante dans chacun des corps conducteurs, les dérivées premières $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ sont nulles en tous les points du corps, il en est de même des dé-

rivées secondes $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$. Ainsi, dans chacun des corps, on a

$$\Delta V = 0;$$

on en conclut, d'après la relation (8), que la densité k de l'électricité libre à l'intérieur des corps est nulle, et, par conséquent, qu'il n'y a pas d'électricité libre à l'intérieur des corps conducteurs. Il résulte de là que, pour les corps parfaitement conducteurs, l'agent électrique, quelle que soit sa nature, réside à la surface même des corps. On se figure l'électricité libre comme une couche infiniment mince répandue à la surface du corps conducteur.

180. *Remarque.* — De la loi de Coulomb nous avons déduit que l'agent électrique n'existe qu'à la surface des corps conducteurs; on pourrait, au contraire, partir de cette dernière loi, considérée comme établie par l'expérience, et en déduire la loi des attractions et répulsions électriques.

Soit $-mm'\varphi(r)$ l'action mutuelle de deux masses électriques infiniment petites m et m'. La résultante des actions exercées par un système de masses électriques données m', m'', ..., sur une masse $+1$ placée en P, aura pour projections

$$X = -\sum m'\varphi(r)\frac{x' - x}{r},$$

. . . .

Si l'on désigne par $f(r)$ une fonction dont la dérivée est égale à $-\varphi(r)$, on verra, comme au nº 164, que ces composantes de la force sont égales et de signes contraires aux dérivées partielles de la fonction *potentiel*

$$V = \sum m' f(r).$$

Cherchons le potentiel d'une couche sphérique homogène. En répétant le calcul du nº 166, on trouve

$$V = \frac{2\pi k a\, da}{\rho}\int r f(r)\, dr.$$

Représentons par $F(r)$ une fonction dont la dérivée est

$rf(r)$. Si le point P est à l'intérieur de la couche sphérique on a

$$V = 2\pi k a\, da \frac{F(a+\rho) - F(a-\rho)}{\rho}.$$

Supposons qu'une sphère pleine, en métal bon conducteur et d'un rayon a, soit électrisée. Nous admettons que l'électricité n'existe qu'à la surface de la sphère, où elle forme une couche infiniment mince et homogène à cause de la symétrie; l'action de cette couche sur un point intérieur P étant nulle, il est nécessaire que la quantité

$$\frac{F(a+\rho) - F(a-\rho)}{\rho}$$

soit indépendante de ρ, quel que soit le rayon a de la sphère. Cette quantité, développée suivant les puissances croissantes de ρ, devient

$$\frac{F(a+\rho) - F(a-\rho)}{\rho} = 2F'(a) + \frac{\rho^2}{3} F'''(a) + \ldots.$$

Le premier membre étant indépendant de ρ, tous les termes du développement sont nuls, à partir du premier; la fonction $F''(a)$, ou la fonction $F''(r)$, est donc une constante A. On en déduit que la fonction $F'(r)$, qui est égale à $rf(r)$, est de la forme $Ar + B$, B étant une nouvelle constante. On a ainsi

$$f(r) = A + \frac{B}{r}, \quad f'(r) = -\frac{B}{r^2},$$

c'est-à-dire

$$\varphi(r) = \frac{B}{r^2}.$$

On retrouve la loi du carré des distances.

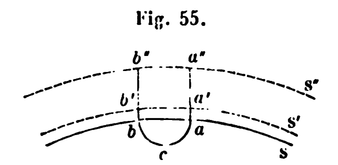
Théorème V.

181. *La densité de la couche électrique répandue à la surface d'un corps conducteur est en chaque point égale à la force qui agit en ce point, divisée par* 4π.

Nous savons que, dans tout système électrique en équilibre,

le potentiel a une valeur constante à l'intérieur de chaque corps conducteur. La surface S d'un corps conducteur est donc une surface de niveau, et l'on imagine que sur cette surface est répandue à l'extérieur une couche électrique infiniment mince, comprise entre la surface S du corps et une surface S′ infiniment voisine (*fig.* 55). Soient $d\sigma$ un élément ab

Fig. 55.



de la surface S; ε l'épaisseur aa' de la couche en ce point; la quantité d'électricité libre répandue sur cet élément de surface est $k\varepsilon\, d\sigma$. Comme on ne peut pas évaluer l'épaisseur ε, on pose

$$k\varepsilon = h, \quad \text{d'où} \quad k\varepsilon\, d\sigma = h\, d\sigma.$$

Le coefficient h est ce qu'on appelle la *densité de la couche électrique*.

Les lignes de force menées par les différents points du contour de l'élément de surface ab forment un canal qui découpe sur une surface de niveau voisine et extérieure S″ un élément $d\sigma'' = a''b''$. Appliquons le théorème I au volume enveloppé par la surface latérale du canal, l'élément $a''b''$ et une surface acb de forme arbitraire située à l'intérieur du corps conducteur. Nous avons vu (n° 174) que la quantité de force qui traverse la surface latérale du canal orthogonal est nulle. Le potentiel ayant une valeur constante dans le corps conducteur, la force est nulle, et aucune propagation de force n'y existe. La quantité de force qui traverse la surface fermée se réduit donc à celle qui traverse l'élément $a''b''$ et qui est égale à $-\frac{dV''}{dn}d\sigma''$. D'autre part, la masse électrique comprise dans le volume considéré est égale à $k\varepsilon\, d\sigma$, ou à $h\, d\sigma$.

On a donc l'équation

$$-\frac{dV''}{dn}d\sigma'' = 4\pi h\, d\sigma \quad \text{ou} \quad -\frac{dV''}{dn}\frac{d\sigma''}{d\sigma} = 4\pi h.$$

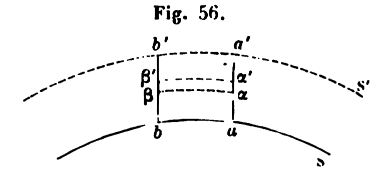
Comme on peut supposer la surface S″ aussi voisine que l'on veut de la surface extérieure S′ de la couche électrique, le rapport $\frac{d\sigma''}{d\sigma}$ est sensiblement égal à l'unité, et l'équation précédente devient

$$(9) \qquad -\frac{dV}{dn} = 4\pi h = F.$$

Le rapport $\frac{dV}{dn}$, qui est nul à l'intérieur du corps conducteur, croît rapidement en valeur absolue du point a au point a'; c'est sa valeur en a', sur la surface extérieure de la couche, c'est-à-dire la force électrique F à l'extérieur du conducteur, qui entre dans l'équation (9). On peut remarquer que la densité h en chaque point est positive ou négative, suivant que le potentiel décroît ou croît, quand on s'éloigne de la surface vers l'extérieur.

182. *Corollaire.* — La force qui agit sur chaque élément $abb'a'$ (*fig.* 56) de la couche électrique est nécessairement

Fig. 56.



dirigée vers l'extérieur, sans quoi l'électricité rentrerait dans l'intérieur du corps; elle exerce contre l'enveloppe isolante une pression que nous nous proposons de calculer.

Nous supposerons que la densité k est constante dans le volume $abb'a'$, ce qui revient à assimiler le fluide électrique à un liquide incompressible.

Partageons ce volume en tranches infiniment minces par des surfaces de niveau $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$. Si l'on désigne par n la longueur de la normale $a\alpha$ et par dn son accroissement $\alpha\alpha'$, la masse comprise entre les deux surfaces ab et $\alpha\beta$ est $kn\,d\sigma$; celle de la tranche $\alpha\alpha'$ est $k\,dn\,d\sigma$. Appliquons le théorème I au volume $ab\beta\alpha$; d'après ce que nous avons dit précédemment, la quantité de force qui traverse la surface qui l'enveloppe se

réduit à celle qui traverse l'élément $\alpha\beta$; cette quantité de force est égale à

$$4\pi kn\, d\sigma,$$

et la force électrique en ce point a pour valeur

$$4\pi kn.$$

La force qui agit sur la tranche $\alpha\alpha'$ est

$$4\pi kn \times k\, dn\, d\sigma = 4\pi k^2 n\, d\sigma\, dn.$$

La force qui agit sur la masse entière $abb'a'$, et qui produit la pression contre le milieu isolant est

$$4\pi k^2\, d\sigma \int_0^\varepsilon n\, dn = 2\pi k^2 \varepsilon^2\, d\sigma = 2\pi h^2\, d\sigma.$$

Par unité de surface la pression est

$$(10) \qquad p = 2\pi h^2 = \frac{1}{8\pi} F^2.$$

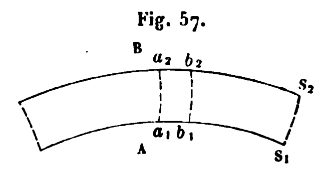
Ainsi la *pression électrique est proportionnelle au carré de la densité de la couche électrique.*

THÉORÈME VI.

183. *Les éléments correspondants de deux couches électriques placées en regard l'une de l'autre contiennent des quantités d'électricité égales et de signes contraires.*

Considérons deux corps conducteurs A et B isolés l'un de

Fig. 57.



l'autre et placés en regard (*fig.* 57), de telle sorte que deux parties S_1 et S_2 de leurs surfaces soient comprises dans un

ıème canal orthogonal, ne renfermant entre les deux couches épandues sur S_1 et S_2 aucune autre masse électrique. Nous ppellerons *éléments correspondants des deux couches* les éléıents $a_1 b_1$ et $a_2 b_2$, ou $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$, compris dans un même canal ·thogonal infiniment petit; imaginons ce canal prolongé d'une anière quelconque dans chacun des corps A et B et fermé ıx deux bouts, et appliquons encore à ce volume le théone I. Aucune quantité de force ne traverse la surface qui nveloppe; d'ailleurs la masse électrique qui y est contenue t $h_1 d\sigma_1 + h_2 d\sigma_2$, h_1 et h_2 désignant les densités sur $d\sigma_1$ et ₂; l'équation se réduit donc à

$$h_1 d\sigma_1 + h_2 d\sigma_2 = 0.$$

184. *Corollaire.* — Supposons que les deux surfaces S_1 et soient très voisines l'une de l'autre, et appelons e leur disıce $a_1 a_2$. Les éléments $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$ étant sensiblement égaux, a approximativement $h_2 = -h_1$. La densité est donnée r la relation (9)

$$h_1 = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn};$$

nais, quand on va de a_1 à a_2, la dérivée diffère peu de $\frac{V_2 - V_1}{e}$; n a donc la formule approchée

$$(11)\qquad h_1 = \frac{V_1 - V_2}{4\pi e}.$$

insi la densité électrique en chaque point varie en raison ıverse de la distance des deux surfaces.

Calculons la charge M_1 : on a approximativement

$$M_1 = \sum h_1 d\sigma_1 = \frac{V_1 - V_2}{4\pi}\sum \frac{d\sigma_1}{e} = \frac{(V_1 - V_2) S_1}{4\pi e_1},$$

désignant une valeur moyenne de la distance e.

Ces considérations peuvent être appliquées au plateau conınsateur et à la bouteille de Leyde. Ordinairement, on fait ımmuniquer le corps B avec le sol; dans ce cas, on a $V_2 = 0$, les formules précédentes se réduisent à

$$h_1 = \frac{V_1}{4\pi e}, \quad M_1 = \frac{V_1 S_1}{4\pi e_1}.$$

Pour une bouteille de Leyde, la charge est proportionnelle au potentiel de l'armature intérieure. Si la bouteille était parfaite, c'est-à-dire si les deux armatures étaient fermées, les charges des deux armatures seraient rigoureusement égales et de signes contraires.

Théorème VII.

185. *Lorsque le potentiel a une valeur constante sur la surface qui enveloppe un volume ne contenant aucune masse agissante, il est constant dans tout ce volume.*

Car s'il variait, comme il conserve une valeur finie et qu'il reprend la même valeur en tous les points de la surface, il aurait à l'intérieur un maximum ou un minimum, ce qui est impossible (n° 173).

186. Corollaire. — *Lorsqu'un corps conducteur présente des cavités ne renfermant aucune masse agissante, toute l'électricité libre se porte à la surface extérieure du corps, comme s'il était plein.*

Le potentiel a une valeur constante V_1 dans le corps conducteur; d'après le raisonnement précédent, il a aussi cette même valeur constante dans chaque cavité. En un point de la surface d'une cavité, la force est nulle et, par conséquent, la densité électrique h est nulle (n° 181). Ainsi, il n'y a pas d'électricité libre à la surface de la cavité; toute l'électricité libre se porte à la surface extérieure du corps, qui se comporte comme s'il était plein.

Théorème VIII.

187. *Lorsque le potentiel a une valeur constante V_1 sur une surface fermée S enveloppant toutes les masses agissantes, il varie entre V_1 et zéro à l'extérieur.*

Supposons, pour fixer les idées, que la valeur V_1 soit positive. Nous remarquons d'abord que le potentiel conserve une valeur positive à l'extérieur de la surface S, car s'il était négatif en certains points, comme il tend vers zéro, d'après sa définition même (n° 164), quand le point P s'éloigne à l'infini, il aurait un minimum, ce qui est impossible. Nous remarquons

ensuite qu'il ne peut acquérir de valeurs supérieures à V_1, car alors il présenterait un maximum.

Il est impossible qu'en un point extérieur P le potentiel ait la valeur V_1. Sur chaque droite allant du point P à la surface S, le potentiel pourrait conserver la valeur constante V_1; sur les droites qui, partant du point P, vont à l'infini sans rencontrer la surface S, il pourrait conserver la valeur constante V_1 sur une certaine longueur PP', pour diminuer ensuite vers zéro; le point P' se comporterait alors comme un maximum.

De même, il est impossible qu'en un point extérieur P le potentiel ait la valeur zéro. Sur chaque droite partant du point P et allant à l'infini sans rencontrer la surface S, il pourrait conserver la valeur zéro. Sur les droites allant du point P à la surface S, il pourrait conserver la valeur zéro sur une certaine longueur PP', pour croître ensuite et devenir égal à V_1; le point P' se comporterait alors comme un minimum.

On en conclut que, dans tout l'espace extérieur à la surface S, le potentiel a une valeur comprise entre V_1 et zéro.

Il est un cas particulier qu'il est bon de remarquer, c'est celui où $V_1 = 0$; dans ce cas, le potentiel est égal à zéro dans tout l'espace extérieur.

188. *Corollaire*. — La surface S, sur laquelle le potentiel a la valeur constante V_1, est une surface de niveau. Si, partant d'un point quelconque *a* de cette surface, on s'éloigne de la surface sur une normale, la valeur absolue du potentiel commence par diminuer; on arrivera à un point *a'* où le potentiel aura une valeur V'_1 un peu plus petite que V_1 en valeur absolue; le lieu du point *a'* formera une seconde surface de niveau S' enveloppant la première. Partant de cette seconde surface et marchant vers l'extérieur, on formera de même une troisième surface de niveau S'' enveloppant les deux premières et sur laquelle le potentiel aura une valeur V''_1, un peu plus petite que V'_1 en valeur absolue. En continuant de la sorte, on formera une suite de surfaces de niveau s'enveloppant les unes les autres et s'étendant à l'infini. Les lignes de force, qui partent des différents points de la surface S, s'éloignent à l'infini, et sur chacune d'elles la valeur absolue du potentiel va en décroissant et en tendant vers zéro. Elles forment des tubes or-

thogonaux dans lesquels la force se propage en s'éloignant de la surface S, ou en s'en rapprochant, suivant que la valeur V_1 du potentiel sur cette surface est positive ou négative.

Théorème IX.

189. *Un système formé de masses électriques fixes données et de charges électriques données sur des corps conducteurs n'admet qu'un état d'équilibre.*

Considérons d'abord un système formé de corps conducteurs A, B, C, ..., isolés et tels que chacun d'eux renferme des quantités égales d'électricité positive et d'électricité négative; je dis que le seul état d'équilibre est l'état neutre. Admettons, en effet, qu'il s'établisse un autre état d'équilibre et appelons V_1, V_2, V_3, ... les valeurs du potentiel dans les différents conducteurs; soit V_1 la plus grande valeur. Le potentiel, tendant vers zéro quand le point P s'éloigne à l'infini, ne peut admettre une valeur plus grande que V_1 en aucun point extérieur, car alors il y aurait un maximum. Quand on s'éloigne de la surface du corps A, le potentiel commence donc par diminuer, ou reste constant, et, par conséquent, la densité électrique h ne peut avoir une valeur négative en aucun point de la surface; comme la charge totale est nulle, le corps A est donc à l'état neutre. En en faisant abstraction, on démontrera de même qu'un second corps est à l'état neutre et ainsi de suite.

Étudions maintenant un système quelconque formé de masses électriques fixes m, m', m'', ..., appartenant à des corps non conducteurs, et de charges M_1, M_2, M_3, ..., répandues sur des corps conducteurs. Nous voulons démontrer qu'il n'y a qu'un état d'équilibre; admettons qu'il y en ait deux; appelons h_1, h_2, ... les densités des couches répandues sur les corps conducteurs dans le premier état, h'_1, h'_2, ... les densités dans le second état. Si l'on change les signes de toutes les masses électriques dans le second état, on aura un nouvel état d'équilibre $-m$, $-m'$, $-m''$, ..., $-h'_1$, $-h'_2$, ...; ajoutant cet état au premier, on obtiendra un nouvel état d'équilibre, dans lequel les masses fixes m et $-m$, m' et $-m'$, ... se neutralisent, et la densité des diverses couches

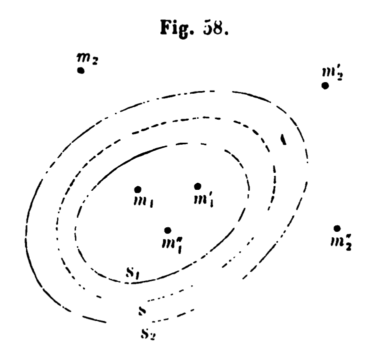
levient $h_1 - h'_1$, $h_2 - h'_2$, ...; la somme algébrique des quantités d'électricité qui forment chaque couche est nulle. On rentre alors dans le cas particulier que nous avons étudié d'abord; ce nouvel état est l'état neutre, et l'on a $h'_1 = h_1$, $h'_2 = h_2$, ... Ainsi, il n'existe qu'un état d'équilibre.

Théorème X.

190. *Lorsque, dans un système électrisé en équilibre, un corps conducteur enveloppe diverses masses électriques, la somme algébrique des quantités d'électricité situées à l'intérieur et sur la surface interne du corps est nulle.*

Soient m_1, m'_1, m''_1, ... les masses électriques situées à l'intérieur du corps conducteur enveloppant A (*fig.* 58); sur

Fig. 58.



la surface interne S_1 du corps A est répandue une couche M_1, sur la surface externe S_2 une couche M_2, et il y a en outre à l'extérieur des masses électriques m_2, m'_2, m''_2, ... Imaginons une surface fermée S dans le corps lui-même, c'est-à-dire entre sa surface interne S_1 et sa surface externe S_2; la quantité de force qui traverse cette surface est nulle, et, par conséquent, d'après le théorème I, la somme algébrique des masses électriques qu'elle enveloppe est nulle; on a donc

$$M_1 + m_1 + m'_1 + m''_1 + \ldots = 0.$$

Les masses m_1, m'_1, ... peuvent appartenir à des corps mauvais conducteurs, ou bien être les couches répandues sur

des corps conducteurs électrisés, séparés les uns des autres et de la surface interne du corps A par un milieu isolant.

Corollaire. — Supposons que le corps A ait été primitivement à l'état neutre; il sera électrisé par influence, et la somme algébrique $M_1 + M_2$ des quantités d'électricité libre développées sur ce corps sera nulle; on aura donc

$$M_2 = -M_1 = m_1 + m'_1 + \ldots.$$

On trouve ainsi la loi de Faraday : *La quantité d'électricité induite sur un corps conducteur enveloppant est égale à la quantité inductrice.*

Théorème XI.

191. *Lorsque, dans un système électrisé en équilibre, un corps conducteur enveloppe diverses masses électriques :* 1° *la couche répandue sur la surface interne du corps et les masses électriques situées à l'intérieur forment un système partiel en équilibre et sans action à l'extérieur;* 2° *la couche répandue sur la surface externe du corps et les masses électriques situées à l'extérieur forment un second système partiel en équilibre et sans action à l'intérieur.*

Conservons les mêmes notations que dans le théorème précédent. 1° Faisons d'abord abstraction de la couche M_2 et des masses extérieures $m_2, m'_2, \ldots$, et supposons que le corps A communique avec le sol; la couche M_1, répandue sur la surface interne S_1, ayant une valeur déterminée

$$M_1 = -(m_1 + m'_1 + m''_1 + \ldots),$$

restera sur cette surface et s'y distribuera de manière à former avec les masses intérieures $m_1, m'_1, m''_1, \ldots$ un système en équilibre, dont le potentiel aura dans le corps A et, par suite, dans tout l'espace extérieur, la valeur zéro (n° **187**). Si l'on supprime la communication avec le sol, cet état d'équilibre subsistera.

2° Supposons maintenant que le corps soit plein; la couche interne Q_1 et les masses intérieures $m_1, m'_1, \ldots$ se combineront de manière à former du fluide neutre; la quantité d'é-

lectricité libre M_2 répandue sur la surface externe S_2 restera la même et s'y distribuera de manière à former avec les masses extérieures m_2, m'_2, m''_2, ... un système en équilibre, dont le potentiel aura, dans tout le volume enveloppé par la surface S_2, une valeur constante V_1.

La superposition de ces deux états d'équilibre constitue un nouvel état d'équilibre. Mais l'ensemble des masses électriques qui composent les deux systèmes partiels est égal aux masses électriques données. Comme un système de masses électriques données n'admet qu'un état d'équilibre, cet état est précisément celui qui résulte de la superposition des deux systèmes partiels.

En chaque point, le potentiel du système total est égal à la somme des potentiels des deux systèmes partiels. A l'extérieur de la surface S_2, il est égal au potentiel du second système partiel; à l'intérieur de la surface S_1, il est égal à celui du premier système partiel, augmenté de la quantité constante V_1.

192. *Remarques.* — 1° S'il n'y a pas de masses électriques à l'extérieur du corps, le second système partiel se compose uniquement de la couche Q_2, répandue sur la surface externe S_2; cette couche, qui est en équilibre d'elle-même, s'appelle *couche de niveau;* son potentiel a la valeur constante V_1 à l'intérieur de la surface S_2. Il est bon de remarquer qu'une couche de niveau n'est formée que d'une seule espèce d'électricité, car la valeur absolue du potentiel diminuant quand on s'éloigne de la surface S_2 vers l'extérieur, la dérivée $\frac{dV}{dn}$, et par suite la densité h de la couche électrique (n° 181), a le même signe en tous ses points.

2° Supposons en outre que la surface interne S_1 du conducteur soit une surface de niveau du système des masses électriques m_1, m'_1, ... situées à l'intérieur et soit V'_1 le potentiel constant de ce système sur cette surface. Le potentiel de la couche M_1 ayant une valeur constante $-V'_1$ sur la surface S_1 est constant dans tout le volume intérieur. La couche M_1 est aussi une couche de niveau. Les deux couches M_1 et M_2, répandues sur les deux faces du conducteur, n'exercent au-

cune action à l'intérieur; la distribution des masses intérieures m_1, m'_1, ... est la même que si le conducteur n'existait pas.

193. *Corollaire I.* — Supposons que l'on enveloppe complètement une chambre d'une surface métallique, et que dans l'intérieur de cette chambre existent des masses électriques, ou que l'on en produise de nouvelles par un moyen quelconque, par exemple en faisant marcher une machine électrique. Les quantités d'électricité situées à l'intérieur de la chambre et la couche électrique qu'elles développent par influence sur la surface interne de l'enveloppe formeront un système analogue au premier système partiel dont nous avons parlé, et qui sera sans action à l'extérieur. L'enveloppe métallique empêche donc l'action des masses électriques intérieures de se propager à l'extérieur; on lui a donné pour cette raison le nom d'*écran électrique*.

Cette même enveloppe empêche aussi l'action de l'électricité extérieure de pénétrer à l'intérieur de la chambre; car les masses électriques extérieures, avec la couche électrique qu'elles développent par influence sur la surface externe de l'enveloppe, forment un système analogue au second système partiel, sans action intérieure. On ne ressentira donc à l'intérieur de la chambre aucun des phénomènes électriques qui s'accompliront au dehors. C'est sur ce principe qu'est basé le nouveau système de paratonnerres de M. Melsens; on entoure l'édifice d'une cage de fils de cuivre qui produisent à peu près l'effet d'une enveloppe métallique continue.

194. *Corollaire II.* — On peut généraliser le théorème précédent. Supposons que plusieurs systèmes analogues à A soient eux-mêmes enveloppés par un conducteur B; les masses électriques renfermées dans les corps A, A', ... formant des équilibres partiels sans action extérieure, on peut en faire abstraction et se borner à considérer les couches M_2, M'_2, ... répandues sur les surfaces externes de ces corps, comme s'ils étaient pleins; ces masses électriques avec la couche répandue sur la surface interne du corps B formeront un nouveau système partiel en équilibre sans action à l'extérieur et aussi sans action à l'intérieur des corps A, A', ...

S'il n'y a pas d'autre masse électrique que celles qui sont enveloppées par le conducteur B ou situées sur ce corps, la couche répandue sur la surface externe du corps B est en équilibre d'elle-même : c'est une couche de niveau.

Théorème XII.

195. *L'action que des masses électriques données exercent à l'extérieur d'une surface fermée qui les enveloppe est la même que celle d'une couche de même masse répandue sur cette surface suivant une certaine loi.*

Soient m, m', ... les masses électriques données dont nous appellerons la somme M, et que nous supposerons fixes, comme si elles appartenaient à des corps non conducteurs; une surface S de forme quelconque les enveloppe. Imaginons un corps conducteur limité intérieurement à la surface S et extérieurement à une surface quelconque S'. Sous l'influence des masses données, il se formera sur la surface S une couche électrique $-$M et sur la surface S' une couche $+$M. D'après le théorème précédent, le potentiel du système formé par la couche $-$M et les masses m, m', ... est nul à l'extérieur de la surface S. Il en résulte que, dans cette région de l'espace, le potentiel de la couche $-$M est égal et de signe contraire à celui des masses données. Concevons maintenant que l'on change le signe de la densité en chaque point de la couche $-$M, nous aurons une couche $+$M répandue sur la surface S et ayant à l'extérieur le même potentiel que les masses données.

Cette couche, répandue sur la surface S, et qui a même action extérieure que les masses données, n'est pas en général une couche de niveau, c'est-à-dire n'est pas en équilibre d'elle-même. Pour qu'elle jouisse de cette propriété, il faudrait que son potentiel fût constant sur la surface S; mais le potentiel de la couche est égal à celui des masses données dans toute la région extérieure à la surface S, et par conséquent sur la surface S elle-même; il faudrait donc que la surface S fût une surface de niveau par rapport aux masses données. La densité de la couche en chaque point serait dans

ce cas

$$h = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}.$$

Si la somme algébrique des masses électriques données était nulle, la couche équivalente formée sur la surface S serait composée de deux quantités égales d'électricité positive et d'électricité négative; l'électricité positive occuperait une partie de la surface, l'électricité négative l'autre partie.

Théorème XIII.

196. *Dans un système électrique quelconque, l'action que les masses extérieures exercent à l'intérieur d'une surface de niveau fermée* S, *enveloppant quelques-unes des masses, est la même que celle de la couche qui se formerait par influence sur cette surface, si elle limitait intérieurement un conducteur.*

Désignons par V'' le potentiel des masses électriques m_2, m'_2, ... situées à l'extérieur de la surface S et par V' celui des masses électriques m_1, m'_1, ... situées à l'intérieur, et dont nous appellerons M_1 la somme. Sous l'influence de ces dernières, il se formerait sur la surface S une couche $-M_1$, si cette surface limitait intérieurement un corps conducteur. Nous avons vu que, à l'extérieur de la surface S, le potentiel V' des masses intérieures est le même que celui d'une couche $+M_1$ répandue sur la surface S et ayant en chaque point une densité égale et contraire à celle de la couche $-M_1$. A l'extérieur de la surface S, le potentiel V du système proposé est donc le même que celui du système formé par la couche fictive $+M_1$ et les masses extérieures m_2, m'_2, ... Si la surface S est une surface de niveau du système proposé, ce potentiel aura une valeur constante V_1 sur la surface; mais, comme la surface ne comprend aucune des masses électriques du second système, son potentiel aura la valeur constante V_1 dans tout l'intérieur (n° 185). En désignant par $V(M_1)$ le potentiel de la couche M_1, on aura donc, en un point intérieur quelconque,

$$V(M_1) + V'' = V_1 \quad \text{ou} \quad V'' = V(-M_1) + V_1.$$

Ainsi, à l'intérieur de la surface S, le potentiel V″ des masses extérieures m_2, m'_2, ... ne diffère de celui de la couche — M_1 que d'une quantité constante V_1, et par conséquent l'action des masses extérieures est la même que celle de la couche — M_1.

197. *Corollaire I.* — Soient S_1 et S_2 deux surfaces de niveau du système proposé, ne comprenant entre elles aucune masse électrique, V_1 et V_2 les valeurs du potentiel sur ces deux surfaces. Supposons que, sur la surface extérieure S_2, soit répandue la couche — M_1 qui se formerait par influence si cette surface limitait intérieurement un conducteur, et sur la surface intérieure S_1 une couche + M_1 dont la densité en chaque point soit égale et contraire à celle qui se formerait par influence dans les mêmes conditions. En tout point extérieur à S_2, le potentiel de la couche M_1 répandu sur S_1 étant égal à V', et celui de la couche — M_1 répandu sur S_2 étant égal à $-V'$, le potentiel de l'ensemble des deux couches est constant et égal à zéro. De même, en tout point intérieur à S_1, le potentiel de la couche — M_1 répandu sur S_2 étant égal à $V'' - V_2$, et celui de la couche + M_1 répandu sur S_1 étant égal à $-V'' + V_1$, le potentiel de l'ensemble des deux couches est constant et égal à $V_1 - V_2$. Entre les deux surfaces, le potentiel de la couche + M_1 répandu sur S_1 étant égal à V', et celui de la couche — M_1 répandu sur S_2 à $V'' - V_2$, le potentiel de l'ensemble est égal à $V' + V'' - V_2$, c'est-à-dire à $V - V_2$; il ne diffère du potentiel du système proposé que d'une quantité constante. On en conclut que l'action de l'ensemble des deux couches fictives, dans l'espace qu'elles comprennent, est la même que celle du système proposé, et que leur action est nulle en dehors, c'est-à-dire à l'extérieur de la surface S_2 et à l'intérieur de S_1.

198. *Corollaire II.* — Imaginons un corps conducteur limité aux deux surfaces de niveau S_1 et S_2, isolé et primitivement à l'état neutre. Il se formera sur la surface intérieure S_1 une couche — M_1 et sur la surface extérieure S_2 une couche + M_1, dont la densité en chaque point sera égale et contraire à celle des couches considérées précédemment. L'action de ces deux couches sera encore nulle en dehors du conducteur; mais,

dans le conducteur, leur potentiel étant égal à $-V+V_2$, leur action sera égale et contraire à celle des masses électriques données, ce qui est évident *a priori*.

Nous avons désigné par V le potentiel des masses électriques données; si l'on appelle U le potentiel du système formé par les masses électriques données et les deux couches qui se sont formées par influence sur les deux faces du conducteur, on a $U=V$ en dehors de S_2, $U=V_2$ dans le conducteur, et $U=V-(V_1-V_2)$ à l'intérieur de S_1. L'introduction d'un conducteur limité à deux surfaces de niveau, dans un système électrique en équilibre, ne trouble pas l'équilibre; mais elle produit à l'intérieur une diminution V_1-V_2 du potentiel.

Théorème XIV (Gauss).

199. *Si un système de corps conducteurs possèdent, dans un premier état d'équilibre, des charges électriques* $M_1, M_2, \ldots$, *et, dans un second état, des charges* $M'_1, M'_2, \ldots$; *si* $V_1, V_2, \ldots$ *sont les valeurs du potentiel à l'intérieur de ces corps dans le premier état,* $V'_1, V'_2, \ldots$ *les valeurs du potentiel à l'intérieur de ces mêmes corps dans le second état, on a la relation*

$$V_1M'_1+V_2M'_2+\ldots=V'_1M_1+V'_2M_2+\ldots.$$

Appliquons la formule de Green (n° 175)

$$\sum(V\Delta V'-V'\Delta V)dv=\sum\left(V\frac{dV'}{dn}-V'\frac{dV}{dn}\right)d\sigma$$

au volume compris entre les surfaces extérieures des couches répandues sur les corps conducteurs et celle d'une sphère décrite d'un point fixe O comme centre avec un rayon R très grand. Puisqu'on a en chaque point

$$\Delta V=-4\pi k,\quad \Delta V'=-4\pi k',$$

et qu'il n'y a aucune masse électrique dans le volume considéré, le premier membre de l'équation est nul. Le signe somme dans le second membre s'étend à la surface entière qui limite le volume, savoir à la surface de la sphère et aux

urfaces extérieures des couches répandues sur les corps conlucteurs.

Cherchons d'abord la partie qui se rapporte à la surface de a sphère. L'élément dn de normale est égal à dR. Si l'on déigne par ρ la distance au centre O de la sphère d'une masse lectrique infiniment petite m, par r sa distance à un point P e la surface de la sphère et par θ l'angle des deux droites Om t OP, on a

$$r^2 = R^2 - 2R\rho\cos\theta + \rho^2,$$

$$V = \sum \frac{m}{r} = \frac{1}{R}\sum m\left(1 - 2\frac{\rho}{R}\cos\theta + \frac{\rho^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

$$r\frac{dr}{dR} = R - \rho\cos\theta = R\left(1 - \frac{\rho}{R}\cos\theta\right),$$

$$\frac{dV}{dn} = \frac{dV}{dR} = -\sum \frac{m}{r^2}\frac{dr}{dR} = -\sum \frac{m}{r^3}r\frac{dr}{dR},$$

$$\frac{dV}{dn} = -\frac{1}{R^2}\sum m\left(1 - \frac{\rho}{R}\cos\theta\right)\left(1 - 2\frac{\rho}{R}\cos\theta + \frac{\rho^2}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Sur la surface de la sphère, le potentiel V et sa dérivée sont onc des quantités infiniment petites de la forme

$$V = \frac{A}{R}, \quad \frac{dV}{dR} = -\frac{B}{R^2},$$

A et B étant des quantités finies qui dépendent de la distribuion des masses électriques et du rayon R de la sphère. Quand e rayon R augmente indéfiniment, ces deux quantités A et B endent vers une même limite, égale à la somme M des masses lectriques. On a de même, dans le second état d'équilibre,

$$V' = \frac{A'}{R}, \quad \frac{dV'}{dR} = -\frac{B'}{R^2}.$$

n élément $d\sigma$ de la surface de la sphère étant égal à $R^2 d\omega$, partie de la somme qui se rapporte à la surface de la sphère pour expression

$$\sum \frac{A'B - AB'}{R}d\omega;$$

le tend vers zéro quand R augmente indéfiniment.

Considérons maintenant la surface extérieure de la couche répandue sur l'un des corps conducteurs, par exemple sur le premier. Les potentiels V et V' ont sur cette surface les valeurs constantes V_1 et V'_1. L'élément dn de normale devant être pris en dehors du volume considéré, c'est-à-dire vers l'intérieur de la couche, les dérivées $\frac{dV}{dn}$ et $\frac{dV'}{dn}$ sont égales et de signes contraires aux dérivées que l'on obtient quand on prend l'élément de normale vers l'extérieur de la couche, et, par conséquent, d'après le théorème V, elles sont égales à $4\pi h$ et à $4\pi h'$. La partie du second membre qui se rapporte à la surface de la couche répandue sur le premier corps est donc égale à

$$4\pi V_1 \sum h' d\sigma - 4\pi V'_1 \sum h\, d\sigma = 4\pi(V_1 M'_1 - V'_1 M_1).$$

Si donc on désigne par n le nombre des corps conducteurs et par i un indice variant de 1 à n, on a la relation

$$\sum_{i=1}^{i=n} V_i M'_i = \sum_{i=1}^{i=n} V'_i M_i. \tag{12}$$

200. *Corollaire I.* — Dans le cas des deux corps, la relation précédente devient

$$V_1 M'_1 + V_2 M'_2 = V'_1 M_1 + V'_2 M_2.$$

Supposons que, dans une première expérience, le premier corps communique avec une machine au potentiel V_1 et le second avec la terre, et que, dans une seconde expérience, le premier corps communique au contraire avec la terre et le second avec la machine ; on aura $V_2 = V'_1 = 0$, $V'_2 = V_1$, et l'équation se réduit à $M'_1 = M_2$. Les charges produites par influence dans les deux expériences sont égales.

201. *Corollaire II.* — Considérons un système de n corps conducteurs isolés les uns des autres et possédant des charges électriques M_1, M_2, ..., M_n. L'équilibre électrique qui s'établit peut être considéré comme la superposition de plusieurs

uilibres partiels, dans lesquels un seul corps a reçu une arge M_i, tous les autres étant primitivement à l'état neutre; s autres corps sont électrisés par influence, mais leurs arges sont égales à zéro. Le potentiel $V^{(i)}$ de cet état partilier d'équilibre en un point P de l'espace est évidemment roportionnel à la charge M_i, et l'on a $V^{(i)} = A_i M_i$, le coefficent A_i étant une fonction des coordonnées du point P et dépendant en outre de la forme et de la position des conducteurs. e potentiel V du système proposé étant égal à la somme des otentiels partiels, on écrira

$$V = \sum_{i=1}^{i=n} A_i M_i.$$

ans chacun des corps conducteurs, le potentiel V a une vaur constante. Soit V_j la valeur du potentiel V dans le corps aractérisé par l'indice j et a_{ij} la valeur constante dans ce ême corps de la fonction A_i des coordonnées du point P; on ura

(13) $$V_j = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} M_i.$$

Supposons maintenant que d'autres charges M'_1, M'_2, ... oient répandues sur les mêmes corps; on aura de même

$$V'_j = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} M'_i.$$

Si dans la relation (12)

$$\sum_{j=1}^{j=n} V_j M'_j = \sum_{j=1}^{j=n} V'_j M_j,$$

n remplace V_j et V'_j par leurs valeurs, on a

$$\sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} M_i M'_j = \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} M'_i M_j,$$

ou, en permutant les deux indices i et j dans le second membre,

$$\sum_{ij} a_{ij} M_i M'_j = \sum_{ij} a_{ji} M_i M'_j.$$

Les charges étant arbitraires, il en résulte que $a_{ij} = a_{ji}$, c'est-à-dire que le déterminant des coefficients a_{ij} est un *déterminant symétrique.*

Des n équations (13), résolues par rapport aux quantités M_1, M_2, ..., on déduirait des valeurs de la forme

$$M_i = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{ji} V_j, \tag{14}$$

dans lesquelles les coefficients satisfont aussi à la relation $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ et forment par conséquent un déterminant symétrique.

Électrisation par influence.

Théorème XV.

202. *La quantité d'électricité induite sur un corps conducteur communiquant avec le sol par une masse électrique située à l'extérieur est moindre que la quantité inductrice.*

Supposons qu'un corps conducteur A communique avec le sol et qu'une masse m d'électricité positive soit placée au point B à l'extérieur du corps. Le corps A sera électrisé par influence et il se formera à sa surface une couche électrique M. Le potentiel V du système est nul à l'intérieur du corps A; il a une valeur positive dans tout l'espace extérieur; car, s'il avait une valeur négative en certains points, il aurait un minimum; mais ce minimum ne pourrait avoir lieu qu'au point B (nº 173), où existe une masse agissante m, et ceci est impossible, puisque cette masse agissante est positive. Le potentiel V est donc positif et il acquiert son maximum au point B. Quand on s'éloigne de la surface du corps A, le potentiel, qui était nul, augmente; il en résulte que la densité électrique h de cette surface est négative (nº 181). Ainsi la couche élec-

trique M produite par influence à la surface du corps A est composée dans toute son étendue d'une même sorte d'électricité, de signe contraire à celui de la masse agissante.

Dans une seconde expérience, supposons le corps A isolé, et le corps infiniment petit B à l'état neutre; puis imaginons que le corps A soit électrisé par une machine au potentiel V'_1 et soit chargé d'une couche M' d'électricité positive. Le corps B, isolé, sera électrisé par influence; mais, à cause de ses dimensions infiniment petites, les deux quantités égales et de signes contraires d'électricité qui s'y développeront n'auront pas d'influence sensible. La couche M' formera donc sur la surface du corps A une couche en équilibre d'elle-même; son potentiel positif V' ira en diminuant graduellement à l'extérieur de V_1 à zéro; sa valeur V'_2 au point B sera donc plus petite que V'_1. Appliquons le théorème précédent à ces deux états d'équilibre relatifs aux mêmes corps A et B; nous aurons la relation $V_1 M + V'_2 m = 0$; d'où

$$\frac{-M}{m} = \frac{V'_2}{V'_1} < 1.$$

Ainsi la quantité d'électricité M produite par influence, ou électricité induite, est moindre que la masse inductrice m, en valeur absolue.

Nous pouvons remarquer que la quantité induite M reste la même quand la masse inductrice m se déplace sur une surface de niveau du corps A isolé, et qu'elle est d'autant plus petite que cette surface de niveau est plus grande.

S'il y avait plusieurs masses électriques fixes agissant sur le corps conducteur A communiquant avec le sol, on chercherait la couche induite par chacune d'elles et on les superposerait pour avoir la couche induite totale.

203. *Corollaire I.* — Si le corps conducteur A était isolé, et primitivement à l'état neutre, à la couche M induite par les masses électriques données, quand le corps A communique avec le sol, on superposerait la couche de niveau de masse — M, qui s'établirait à sa surface, s'il était isolé, sans être soumise à l'action d'aucune masse électrique extérieure.

Enfin, si le corps A était isolé et chargé primitivement d'une

quantité d'électricité donnée M_1, à la charge induite M on su perposerait la couche de niveau de masse $M_1 - M$.

204. *Corollaire II.* — Considérons maintenant l'influenc réciproque de deux corps conducteurs A et B isolés, exté rieurs l'un à l'autre, et chargés primitivement de quantité d'électricité données M_1 et M_2. On ramène ce cas général à de cas plus simples par la méthode de Murphy. Soit m_1 la couch de niveau qui, répandue sur A, y produit le potentiel 1; cett couche, supposée fixe, induira sur B, communiquant avec l sol, une couche $-m_2$. La couche $-m_2$, supposée fixe, induir à son tour sur A, communiquant avec le sol, une couche m_3 cette dernière, supposée fixe, induira sur B, communiquan avec le sol, une couche $-m_4$, et ainsi de suite indéfiniment Superposons ces diverses couches, nous aurons sur A une couche

$$M'_1 = m_1 + m_3 + m_5 + \ldots,$$

sur B une couche

$$-M'_2 = -m_2 - m_4 - m_6 - \ldots;$$

il est facile de voir que les deux couches M'_1 et $-M'_2$ ont ensemble un potentiel égal à 1 sur A, à zéro sur B, et par conséquent sont en équilibre sous leur action mutuelle.

De même, soit m'_1 la couche de niveau qui, répandue sur B, y produit le potentiel 1. Cette couche, supposée fixe, induira sur A, communiquant avec le sol, une couche $-m_2$ (n° 200); celle-ci, supposée fixe, induira sur B, communiquant avec le sol, une couche m'_3, et ainsi de suite indéfiniment. Les deux couches

$$-M'_2 = -m_2 - m_4 - \ldots,$$
$$M''_1 = m'_1 + m'_3 + \ldots,$$

répandues sur A et sur B, ont ensemble un potentiel égal à 1 sur B, à zéro sur A, et, par conséquent, constituent un nouvel état d'équilibre.

Concevons maintenant que l'on multiplie la densité en chaque point dans le premier état d'équilibre par V_1, la densité en chaque point dans le second état par V_2, les quantités

V_1 et V_2 satisfaisant aux deux équations

$$V_1 M'_1 - V_2 M'_2 = M_1,$$
$$-V_1 M'_2 + V_2 M'_1 = M_2,$$

et que l'on superpose les deux nouveaux états d'équilibre ainsi obtenus, on aura l'état d'équilibre réciproque des deux quantités d'électricité données M_1 et M_2, répandues sur A et B. Le potentiel de l'ensemble aura les valeurs constantes V_1 sur A, V_2 sur B. Si l'on donnait les valeurs V_1 et V_2 du potentiel sur A et B, les mêmes équations détermineraient les couches M_1 et M_2.

Distribution de l'électricité sur une sphère ou un ellipsoïde.

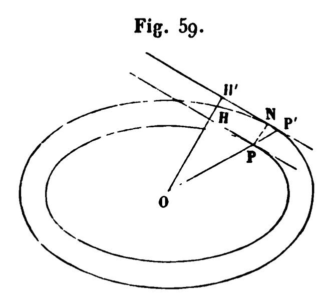
205. La recherche de la loi de distribution de l'électricité libre à la surface d'un corps conducteur isolé, soumis ou non à l'action d'un autre corps électrisé, présente de grandes difficultés mathématiques; cette question spéciale s'écartant du plan de ce cours, nous nous bornerons à en citer quelques exemples simples.

Il est évident que sur une sphère isolée et soustraite à toute action extérieure une masse M d'électricité se distribue suivant une couche uniforme; si donc on appelle a le rayon de la sphère, la densité de la couche sera $h = \frac{M}{4\pi a^2}$. Le potentiel (nº 166) est $\frac{M}{a}$ à l'intérieur, et $\frac{M}{\rho}$ à l'extérieur, ρ désignant la distance du point P au centre. La pression électrique est égale à $\frac{M^2}{8\pi a^4}$.

Considérons maintenant un corps conducteur également isolé ayant la forme d'un ellipsoïde; imaginons une seconde surface ellipsoïde, concentrique et homothétique à la première, très voisine et extérieure, et concevons que l'espace compris entre ces deux surfaces soit rempli d'un fluide de densité constante k. On sait qu'une couche ellipsoïde homogène telle que celle-là n'exerce aucune action sur un point

intérieur; le potentiel à l'intérieur étant constant, cette couche pourra servir à figurer la loi de distribution de l'électricité à la surface de l'ellipsoïde. Soit $1+\alpha$ le rapport de similitude des deux surfaces, α étant très petit; appelons p la perpendiculaire OH abaissée du centre sur le plan tangent au point P (*fig.* 59); l'épaisseur ε de la couche en P est la distance PN des plans tangents parallèles aux points homologues P et P', distance égale à $p\alpha$; on a donc $h = k\varepsilon = k\alpha p$; ainsi la densité h de la couche électrique en chaque point P est

Fig. 59.



proportionnelle à la distance du centre au plan tangent en ce point. Une ligne d'égale densité est la ligne de contact d'un plan tangent à l'ellipsoïde et à une sphère concentrique donnée. Si l'on désigne par a, b, c les longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde, le volume de la couche étant $\frac{4}{3}\pi abc[(1+\alpha)^3-1]$, ou sensiblement $4\pi abc\alpha$, sa masse ou la charge électrique est

$$M = 4\pi abc\alpha k,$$

d'où

$$h = \frac{Mp}{4\pi abc}.$$

On a d'ailleurs

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

Si l'on suppose que c devienne très petit, l'ellipsoïde se trans-

forme en un plateau elliptique infiniment mince; puisque

$$\lim \frac{p}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}},$$

on a

$$h = \frac{M}{4\pi ab} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}};$$

les lignes d'égale densité sont des ellipses concentriques et homothétiques. La densité électrique augmente à mesure qu'on s'éloigne du centre sur un rayon.

CHAPITRE II.

TRAVAIL DES FORCES ÉLECTRIQUES.

Travail des forces électriques. — Énergie électrique. — Décharge d'une bouteille de Leyde. — Décharge d'une batterie. — Théorème de Maxwell.

Travail des forces électriques.

206. Le jeu des machines électriques développe des quantités égales d'électricité positive et d'électricité négative. Quand les corps électrisés sont bons conducteurs, si on les met ensuite en communication les uns avec les autres et avec le sol, toute électricité libre disparaît, et le système revient à l'état neutre. Lorsque, par une cause quelconque, il y a déplacement des fluides électriques, ou mouvement des corps électrisés eux-mêmes, ce changement dans l'état du système est accompagné d'un travail des forces électriques. Si l'on appelle m et m' deux masses électriques infiniment petites, r leur distance mutuelle, le travail élémentaire des forces électriques a pour expression

$$d\mathfrak{T} = \sum \frac{mm'}{r^2}\,dr = -d\sum \frac{mm'}{r},$$

le signe somme s'étendant à toutes les combinaisons des masses électriques deux à deux. Nous poserons

$$\mathrm{W} = \sum \frac{mm'}{r},$$

ce qui donne

$$d\mathfrak{T} = -d\mathrm{W}.$$

Lorsque le système passe de l'état 1 à l'état 2, le travail des forces électriques est

$$\mathfrak{T} = \mathrm{W}_1 - \mathrm{W}_2.$$

Énergie électrique.

207. La valeur de la fonction W, dans un état quelconque du système, est le travail que développeraient les forces électriques si le système revenait à l'état neutre; car on aurait, dans ce cas, $W_2 = 0$ et, par suite, $\mathfrak{T} = W_1$. Le système revenant de lui-même à l'état neutre quand on établit la communication des conducteurs entre eux et avec le sol, on en conclut que la quantité W a toujours une valeur positive. Nous l'appellerons, par analogie, *énergie potentielle du système électrisé*, ou, plus simplement, *énergie électrique*.

Inversement, pour électriser le système par le mouvement d'une machine, il faut dépenser une quantité de travail moteur égale à l'énergie potentielle qu'on veut lui communiquer. En général, le travail des forces électriques, pour un changement quelconque, est égal à la variation qu'éprouve l'énergie potentielle, quand on passe du premier état au second.

L'énergie électrique est une nouvelle forme de l'énergie. Lorsqu'on charge une batterie électrique, on transforme une certaine quantité de travail, ou d'énergie mécanique, en une quantité égale d'énergie électrique, et, réciproquement, dans la décharge de la batterie, une certaine quantité d'énergie électrique se transforme en une quantité égale d'énergie mécanique ou d'énergie calorifique.

208. On peut exprimer l'énergie potentielle W d'un système de masses électriques à l'aide de la fonction V, que nous avons nommée le *potentiel du système*. La somme

$$W = \sum \frac{mm'}{r}$$

renferme les combinaisons de toutes les masses élémentaires deux à deux. Considérons les combinaisons d'une masse élémentaire déterminée m avec chacune des autres masses, nous obtiendrons la somme partielle

$$m \sum \frac{m'}{r}.$$

Mais $\sum \frac{m'}{r}$ est la valeur du potentiel V de tout le système au point où est située la masse m ; la somme partielle est donc Vm. De même les combinaisons d'une autre masse déterminée m' avec chacune des autres donneront la somme partielle $m'V'$, V' étant la valeur du potentiel au point où est placée la masse m'; on a ainsi $mV + m'V' + \ldots$ ou $\sum mV$. Mais, de cette manière, chaque combinaison a été répétée deux fois; par exemple, la combinaison des deux masses m et m' est entrée, une première fois, dans la somme partielle mV, une seconde fois dans $m'V'$. Il faut donc prendre la moitié du résultat, et l'on a la relation

$$W = \frac{1}{2} \sum mV. \tag{1}$$

209. Considérons un système de corps conducteurs A, B, C, ..., sur lesquels sont répandues des charges électriques M_1, M_2, M_3, ... L'équilibre électrique étant établi, le potentiel a une valeur constante V_1 dans le corps A, une autre valeur constante V_2 dans le corps B,.... Dans la somme $\sum mV$, les termes qui se rapportent aux différentes masses électriques répandues sur le corps A donnent une somme partielle $V_1 \sum m$ ou $V_1 M_1$; de même, les termes qui se rapportent aux masses électriques répandues sur le corps B donnent la somme partielle $V_2 M_2$, ...; la relation (1) devient ainsi

$$W = \frac{1}{2}(V_1 M_1 + V_2 M_2 + \ldots). \tag{2}$$

Remarquons que, si un corps est resté complètement isolé pendant qu'on a chargé le système, et par conséquent n'a été électrisé que par influence, ce corps contenant des quantités égales d'électricité positive et d'électricité négative, sa charge M est égale à zéro, ainsi que le terme correspondant de l'énergie. Si l'un des corps communique avec la terre, le potentiel y étant nul, le terme correspondant dans l'expression de l'énergie est aussi nul. Ainsi, les corps électrisés par influence

et ceux qui communiquent avec la terre donnent des termes nuls dans l'expression de l'énergie potentielle du système.

Il est clair que la quantité de travail nécessaire pour communiquer à un corps une charge électrique donnée est minimum lorsque le corps est parfaitement conducteur; car, si l'on imagine une autre distribution à l'aide de résistances intérieures, telles que celles qui existent dans les corps imparfaitement conducteurs, et que l'on suppose ensuite que ces résistances diminuent peu à peu, le fluide reviendra à la première distribution, en surmontant les résistances, et par conséquent accomplissant un travail positif.

Lorsqu'un système est isolé, ou forme un système complet, l'électrisation de ce système par les actions mutuelles des corps qui le composent développe des quantités égales d'électricité positive et d'électricité négative, et l'on a

$$M_1 + M_2 + \ldots = 0.$$

Appelons V le potentiel de ce système. Supposons qu'à l'extérieur existent des masses électriques, mais à une distance assez grande pour que leur potentiel ait une valeur sensiblement constante V_0 dans l'étendue occupée par le système; ces masses extérieures n'exerceront pas d'action sensible sur le système. L'addition du potentiel constant V_0 du *champ électrique* dans lequel est plongé le système au potentiel relatif V_i de ce système ne change pas l'expression de son énergie; car on a

$$\frac{1}{2}\sum(V_0 + V_i)M_i = \frac{1}{2}V_0\sum M_i + \frac{1}{2}\sum V_i M_i = \frac{1}{2}\sum V_i M_i.$$

Décharge d'une bouteille de Leyde.

210. Considérons une bouteille de Leyde à armatures complètes. On met l'armature intérieure en communication avec une source d'électricité qui possède un potentiel V_1, et l'armature extérieure avec le sol; quand la bouteille est chargée à refus, l'armature intérieure a acquis le même potentiel V_1, et s'est chargée d'une quantité $+ M_1$ d'électricité. Il s'est produit sur l'armature extérieure une charge égale $- M_1$ d'électricité contraire, et sur cette armature le potentiel V_2 est nul.

La bouteille présente alors un état particulier d'équilibre que nous avons étudié au n° **191**; son potentiel à l'extérieur étant nul, elle n'exerce aucune action sur les corps environnants et se comporte à leur égard comme un corps neutre. Cependant elle renferme une quantité d'énergie égale à

$$W = \frac{1}{2} V_1 M_1.$$

Nous avons trouvé (n° **184**)

$$M_1 = \frac{V_1 S_1}{4\pi e_1};$$

si l'on désigne par λ le rapport $\frac{4\pi e_1}{S_1}$, qui est une constante pour la bouteille donnée, on a

$$V_1 = \lambda M_1$$

et, par suite,

$$W = \frac{1}{2} \lambda M_1^2.$$

Ainsi *l'énergie potentielle d'une bouteille de Leyde est proportionnelle au carré de la charge.*

Cette énergie se manifeste lorsqu'on réunit les deux armatures par un excitateur; la bouteille se décharge complètement, et il y a production d'une quantité W de travail, qui se traduit par une étincelle et par un échauffement du fil de communication. Une partie de l'énergie intérieure est employée à vaincre la résistance de l'air, c'est-à-dire à produire l'étincelle; le reste se change en énergie calorifique. Quand le fil de communication est gros et court, l'étincelle est énergique, et l'échauffement du conducteur très faible. Quand le fil est long et fin, l'étincelle est faible, mais le fil s'échauffe davantage.

Plusieurs expériences confirment les résultats de cette théorie. M. Riess a interposé une lame de mica ou une carte sur le passage de l'étincelle, et il a constaté qu'alors l'échauffement du fil est plus faible. La résistance à vaincre étant plus grande, l'étincelle a absorbé une plus grande partie de l'énergie.

Si l'on réunit les deux armatures par un fil très long et très

fin, l'étincelle devient très faible et le travail correspondant négligeable. En opérant dans ces conditions, M. Riess a trouvé, bien avant la théorie, que, si l'on donne à une même bouteille des charges différentes, la quantité de chaleur dégagée est proportionnelle au carré de la charge.

Décharge d'une batterie.

211. Considérons une batterie formée de n bouteilles identiques. On les charge séparément avec une même source; chacune d'elles prend une charge m_1, et l'on a, en appelant V_1 le potentiel de la source,

$$V_1 = \lambda m_1.$$

Si l'on réunit alors toutes ces bouteilles, l'équilibre subsiste, puisqu'elles n'exercent aucune action les unes sur les autres et que le potentiel est le même sur toutes les armatures intérieures. La charge totale est la même que si la batterie avait été mise directement en relation avec la source. L'énergie potentielle de la batterie est donnée par la formule

$$W = \frac{1}{2} n V_1 m_1 = \frac{1}{2} V_1 M_1,$$

M_1 désignant la charge totale de la batterie.

Une batterie électrique de n bouteilles égales est donc équivalente à une bouteille unique de même épaisseur, dont la surface serait n fois plus grande que la surface de chacune des bouteilles qui la composent.

On en déduit aussi

$$W = \frac{1}{2} \lambda \frac{M_1^2}{n}.$$

L'énergie d'une batterie est proportionnelle au carré de la charge et en raison inverse du nombre des bouteilles. Cette loi a été découverte expérimentalement par M. Riess.

212. Étudions maintenant les décharges incomplètes. Prenons deux batteries, l'une de n bouteilles, l'autre de n' bouteilles, toutes identiques. Chargeons la première batterie à

refus, comme à l'ordinaire; l'énergie potentielle de cette batterie est alors

$$W = \frac{1}{2} n V_1 m_1.$$

La deuxième batterie étant à l'état neutre, on réunit les armatures intérieures des deux batteries; un nouvel état d'équilibre s'établit; la charge nm_1 se répand alors sur les $n+n'$ bouteilles, et chacune d'elles prend une charge

$$m'_1 = \frac{nm_1}{n+n'}.$$

On a maintenant une nouvelle batterie composée de $n+n'$ bouteilles; sur les armatures intérieures le potentiel est

$$V'_1 = \lambda m'_1 = V_1 \frac{n}{n+n'};$$

son énergie potentielle est

$$W' = \frac{1}{2}(n+n')V'_1 m'_1 = W \frac{n}{n+n'}.$$

Le travail accompli pendant cette transformation est égal à la diminution $W - W'$ d'énergie potentielle

$$W - W' = W \frac{n'}{n+n'}.$$

Cette formule avait été trouvée aussi expérimentalement par M. Riess.

213. Étudions encore la charge par cascade. Supposons plusieurs batteries réunies en cascade, la première comprenant n_1 bouteilles, la seconde n_2, la troisième n_3, ... Toutes ces bouteilles sont identiques; l'armature extérieure de la dernière batterie communique avec le sol, l'armature intérieure de la première avec une source dont le potentiel est V_1. L'armature intérieure de la première batterie prend une charge $+M_1$; il se produit une charge $-M_2$ sur l'armature extérieure de la première batterie et une charge $+M_2$ sur l'armature intérieure de la seconde, le potentiel sur ces deux conducteurs

réunis étant V_2; de même, il y a une charge $-M_3$ sur l'armature extérieure de la seconde et une charge $+M_3$ sur l'armature intérieure de la troisième, le potentiel étant V_3, ...; le potentiel sur la dernière armature est nul. On aura donc

$$W = \frac{1}{2}(V_1 M_1 - V_2 M_2 + V_2 M_2 - V_3 M_3 + V_3 M_3 - \ldots)$$

ou

$$W = \frac{1}{2} V_1 M_1,$$

ce qui est évident *a priori*, d'après une remarque faite au n° 209.

Pour une bouteille de la première batterie, on a (n° 184)

$$m_1 = \frac{(V_1 - V_2) S_1}{4\pi e_1} = \frac{1}{\lambda}(V_1 - V_2).$$

Les charges des batteries successives sont donc

$$M_1 = \frac{1}{\lambda} n_1 (V_1 - V_2),$$

$$M_2 = \frac{1}{\lambda} n_2 (V_2 - V_3),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$M_p = \frac{1}{\lambda} n_p (V_p - 0).$$

On en déduit

$$V_1 = \lambda\left(\frac{M_1}{n_1} + \frac{M_2}{n_2} + \frac{M_3}{n_3} + \ldots\right).$$

Supposons encore les bouteilles parfaitement fermées; alors les charges des deux armatures de chacune d'elles sont égales, et l'on a

$$M_1 = M_2 = M_3 = \ldots,$$

d'où

$$V_1 = \lambda M_1\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \ldots\right)$$

et

$$W = \frac{1}{2} V_1 M_1 = \frac{1}{2}\lambda M_1^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \ldots\right).$$

Telle est l'énergie potentielle de l'ensemble des batteries; c'est le travail qu'il faut dépenser pour les charger, ou la chaleur dégagée pendant la décharge. M. Riess avait trouvé, par l'expérience, pour deux batteries,

$$W = \frac{1}{2}\lambda M_1^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right).$$

Les relations

$$\frac{V_1 - V_2}{\frac{1}{n_1}} = \frac{V_2 - V_3}{\frac{1}{n_2}} = \ldots = \frac{V_p}{\frac{1}{n_p}} = \frac{V_1}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_p}}$$

déterminent les valeurs décroissantes du potentiel dans les batteries successives. Lorsque toutes les batteries contiennent le même nombre de bouteilles, c'est-à-dire lorsqu'on a $n_1 = n_2 = n_3 = \ldots$, ces relations se réduisent à

$$V_1 - V_2 = V_2 - V_3 = \ldots = V_{p-1} - V_p = V_p = \frac{V_1}{p};$$

le potentiel décroît en progression arithmétique.

Théorème de Maxwell.

214. Considérons un système de n corps conducteurs isolés les uns des autres et possédant des charges électriques M_1, M_2, ..., M_n. L'énergie du système est donnée par la formule

$$(3) \qquad W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} V_i M_i.$$

On a d'ailleurs, d'après la formule (13) du n° 201,

$$(4) \qquad V_i = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ji} M_j;$$

les coefficients a_{ji} dépendent uniquement de la forme et de la position des corps.

Supposons que les corps, restant isolés, éprouvent un dé-

placement ou une déformation infiniment petite ; les charges M_i resteront constantes, mais les coefficients a_{ji} varieront; par suite, les valeurs V_i du potentiel dans les différents corps éprouveront les variations

$$dV_i = \sum_{j=1}^{j=n} M_j da_{ji};$$

il en résulte une variation de l'énergie

$$dW = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} M_i dV_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} M_i M_j da_{ji}.$$

Supposons maintenant que, pendant le déplacement ou la déformation, on entretienne sur chaque corps le potentiel à une valeur constante, en ajoutant ou en retranchant de l'électricité. Il suffit pour cela de concevoir que les corps proposés communiquent avec des corps très éloignés, mais de dimensions relativement très grandes, sur lesquels le potentiel ait les valeurs $V_1, V_2, \ldots, V_n$. La variation de l'énergie dans cette seconde expérience est

$$\delta W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} V_i \delta M_i.$$

Le potentiel

$$V_j = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} M_i$$

conservant une valeur constante, on a

$$\sum_{i=1}^{i=n} (a_{ij} \delta M_i + M_i \delta a_{ij}) = 0,$$

ou

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} \delta M_i = -\sum_{i=1}^{i=n} M_i \delta a_{ij},$$

et, en multipliant les deux membres de cette dernière égalité

par la quantité constante M_j,

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} M_j \, \delta M_i = -\sum_{i=1}^{i=n} M_i M_j \, \delta a_{ij}.$$

Si maintenant on attribue à l'indice j successivement les n valeurs 1, 2, 3, ..., n et si l'on ajoute membre à membre les n égalités correspondantes, on obtient l'égalité

$$\sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} M_j \, \delta M_i = -\sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=n} M_i M_j \, \delta a_{ij}.$$

Le premier membre peut se mettre sous la forme

$$\sum_{i=1}^{i=n} \delta M_i \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} M_j;$$

mais, à cause de la relation $a_{ij} = a_{ji}$, on a

$$\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} M_j = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ji} M_j = V_i;$$

il est donc égal à

$$\sum_{i=1}^{i=n} V_i \, \delta M_i = 2 \, \delta W.$$

Si le déplacement est le même dans les deux expériences, on a $\delta a_{ij} = da_{ij} = da_{ji}$, et le second membre est égal à $2 dW$. On obtient ainsi la relation

$$(5) \qquad \delta W = -dW.$$

On conclut de là qu'*à un même déplacement ou à une même déformation d'un système de corps électrisés, soit que les charges restent constantes, soit que le potentiel dans chaque corps reste constant, correspondent des travaux égaux et de signes contraires.*

CHAPITRE III.

HYPOTHÈSES DES FLUIDES ÉLECTRIQUES.

Deux fluides. — Un seul fluide.

Deux fluides.

215. La théorie des phénomènes d'électricité statique repose tout entière sur la loi de Coulomb. Les théorèmes que nous avons démontrés, et qui ont été vérifiés par l'expérience, sont la conséquence de cette loi fondamentale. Pour énoncer la loi de Coulomb, et les conséquences que nous en avons déduites, nous nous sommes servi de l'hypothèse des deux fluides électriques; mais il est clair que ce n'est là qu'une manière de parler, et que la vérité de la théorie est indépendante de cette hypothèse, ou de toute autre que l'on pourrait faire sur la nature de l'électricité.

Un seul fluide.

216. Dans le siècle dernier, Franklin est parvenu à représenter les phénomènes d'électricité statique à l'aide d'un seul fluide; mais alors il faut faire intervenir l'action de la matière pondérable. Chaque élément de volume est considéré comme renfermant une certaine quantité de matière pondérable et une quantité de fluide électrique. On admet qu'il y a attraction entre deux masses de matière pondérable et aussi entre la matière pondérable et la matière électrique, répulsion entre deux masses de matière électrique, et que ces forces varient toutes en raison inverse du carré de la distance.

Considérons d'abord l'action d'un élément de volume A, renfermant une masse pondérable M et une masse électrique μ, sur une masse électrique m' placée à la distance r. Cette action se compose de deux forces, l'une attractive $\frac{f_1 M m'}{r^2}$, l'autre répulsive $\frac{f_2 \mu m'}{r^2}$; leur résultante est

$$\frac{(f_1 M - f_2 \mu) m'}{r^2}.$$

Si l'on a

$$f_1 M - f_2 \mu = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\mu}{M} = \frac{f_1}{f_2},$$

la résultante est nulle, et l'élément de volume A est dit à l'état *neutre;* cet élément n'exerce alors aucune action sur la matière électrique environnante. Ainsi un corps est à l'état neutre, lorsque la quantité de matière électrique qu'il renferme est dans un rapport déterminé avec la quantité de matière pondérable. Si l'on suppose que le coefficient f_2 soit très grand par rapport à f_1, la masse électrique μ sera très petite par rapport à la masse pondérable M.

217. Considérons maintenant l'action mutuelle de deux éléments de volume A et B à l'état neutre; le premier renferme une masse pondérable M et une masse électrique μ, le second une masse pondérable M' et une masse électrique μ', et l'on a

$$\frac{\mu}{M} = \frac{\mu'}{M'} = \frac{f_1}{f_2}.$$

Cette action est la résultante de quatre forces

$$\frac{f M M'}{r^2} + \frac{f_1 M \mu'}{r^2} + \frac{f_1 M' \mu}{r^2} - \frac{f_2 \mu \mu'}{r^2},$$

savoir : l'attraction des masses pondérables M et M', l'attraction de la masse pondérable M sur la masse électrique μ', l'attraction de la masse pondérable M' sur la masse électrique μ, et enfin la répulsion des masses électriques μ et μ'. Cette

ésultante se réduit à

$$\frac{MM'}{r^2}\left(f+\frac{f_1^2}{f_2}\right).$$

i l'on représente par φ la constante $f+\frac{f_1^2}{f_2}$, elle se met sous a forme simple

$$\frac{\varphi MM'}{r^2}:$$

'est l'attraction universelle, ou la gravitation.

218. Un corps *électrisé* est un corps qui renferme une quanité de matière électrique plus grande ou plus petite que la uantité que nous venons de définir, et qui constitue l'état eutre. Il est électrisé, positivement si la matière électrique st en excès, négativement si elle est en défaut.

Cherchons l'action mutuelle de deux éléments de volume lectrisés A et B, renfermant, le premier une masse pondéable M et une masse électrique $\frac{f_1 M}{f_2}+m$, le second une nasse pondérable M' et une masse électrique $\frac{f_1 M'}{f_2}+m'$; cette ction est la résultante des quatre forces

$$\frac{fMM'}{r^2}+\frac{f_1 M\left(\frac{f_1 M'}{f_2}+m'\right)}{r^2}+\frac{f_1 M'\left(\frac{f_1 M}{f_2}+m\right)}{r^2}$$
$$-\frac{f_2\left(\frac{f_1 M}{f_2}+m\right)\left(\frac{f_1 M'}{f_2}+m'\right)}{r^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{MM'}{r^2}\left(f+\frac{f_1^2}{f_2}\right)-\frac{f_2 mm'}{r^2}$$

ou

$$\frac{\varphi MM'}{r^2}-\frac{f_2 mm'}{r^2}.$$

Le premier terme $\frac{\varphi MM'}{r^2}$ est la gravitation, le second $-\frac{f_2 mm'}{r^2}$ action électrique. En faisant abstraction de la gravitation, et

ne considérant que l'action électrique, on voit qu'il y a répulsion si les corps sont électrisés dans le même sens, attraction s'ils sont électrisés en sens contraires. L'expression $-\frac{f_2 mm'}{r^2}$ de la force électrique ne dépend que des excès positifs ou négatifs m et m'; ces excès sont ce que nous appellerons *les quantités d'électricité libre,* contenues dans les volumes A et B. On retrouve ainsi la loi de Coulomb. L'hypothèse d'un seul fluide, combinée avec l'action de la matière pondérable, rend donc compte des phénomènes, exactement de la même manière que s'il y avait deux fluides différents.

On pourrait même se dispenser d'admettre qu'il y a attraction entre deux masses de matière pondérable; l'attraction de la matière pondérable sur la matière électrique suffirait pour produire la gravitation. Ceci revient à supposer $f=0$; d'où

$$\varphi = \frac{f_1^2}{f_2}.$$

219. Si l'on adopte comme plus probable l'hypothèse d'un seul fluide, il est naturel de supposer que ce fluide n'est autre chose que l'éther, par les vibrations duquel on explique les phénomènes lumineux. Toutefois l'expérience apprend qu'il n'y a pas de phénomènes électriques dans le vide, c'est-à-dire en l'absence de toute matière pondérable. Il semble résulter de là que l'on doit appeler *fluide électrique* contenu dans un volume donné, non pas la quantité totale d'éther qu'il renferme, mais la somme des atmosphères d'éther qui entourent les molécules pondérables (n° 2), c'est-à-dire l'excès de la quantité totale d'éther que contient le volume sur la quantité qu'il contiendrait sans la présence des molécules pondérables. Pour expliquer les phénomènes électriques, il suffira d'admettre que la matière pondérable attire l'éther en raison inverse du carré de la distance, et que l'action mutuelle de deux atmosphères d'éther est proportionnelle au produit de leurs masses et aussi en raison inverse du carré de la distance.

Nous ferons remarquer, à ce propos, que la théorie des phénomènes lumineux semble exiger une loi d'action toute différente entre les molécules voisines de l'éther. L'énorme vitesse de propagation des ondes lumineuses indique d'abord

que la force qui s'exerce entre deux molécules voisines est très énergique. Les recherches théoriques de Cauchy ont montré que, dans un milieu isotrope, comme l'éther libre répandu dans le vide, peuvent se propager deux sortes de vibrations, les unes transversales, les autres longitudinales, avec des vitesses très différentes; l'existence des unes et des autres dépend de la loi des forces moléculaires. On attribue les phénomènes lumineux aux vibrations transversales. En suivant la méthode de Cauchy, j'ai fait voir que, pour que les vibrations transversales puissent se propager, il est nécessaire que la force répulsive qui s'exerce entre deux molécules voisines d'éther varie en raison inverse d'une puissance de la distance plus élevée que la quatrième. L'étude des lois de la propagation de la lumière dans les milieux biréfringents semble indiquer que cette puissance est précisément la sixième, et l'absence de dispersion dans le vide conduit à la même conclusion. Il y a contradiction apparente entre ces deux lois; mais il est probable que les phénomènes lumineux sont dus à l'action immédiate des molécules d'éther sur les molécules les plus voisines, tandis que, dans l'ordre d'idées où nous nous plaçons actuellement, la force électrique proviendrait de l'action mutuelle des atmosphères d'éther qui entourent les molécules pondérables.

CHAPITRE IV.

THÉORIE DES COURANTS ÉLECTRIQUES.

Loi d'Ohm. — Conducteurs linéaires. — Travail des forces électromotrices. — Loi de Joule.

Loi d'Ohm.

220. Lorsque le potentiel a une valeur constante dans un corps conducteur, il y a équilibre électrique; mais, lorsque le potentiel n'a pas la même valeur en chaque point, l'équilibre cesse d'exister et un mouvement électrique se produit, car chaque unité de masse électrique est sollicitée par une force égale à $-\frac{dV}{dn}$ et normale à la surface de niveau. Quand le potentiel est une fonction de x, y, z indépendante du temps, le mouvement électrique arrive presque instantanément à un régime régulier et permanent; c'est le cas que nous nous proposons d'étudier en ce moment.

On ne connaît pas la nature de ce mouvement; mais on sait que les courants électriques ne se propagent pas dans un espace vide de matière pondérable; il semble donc que l'électricité passe d'une molécule pondérable à une molécule voisine, de celle-ci à une troisième, et ainsi de suite, comme si elle 'ajoutait successivement à l'atmosphère de chacune d'elles, de sorte que le mouvement général se composerait d'une suite de petits mouvements, s'effectuant avec une très grande rapidité. En passant d'une molécule pondérable à une autre, l'électricité communique à celle-ci la force vive qu'elle acquiert dans ce petit mouvement. Cette communication de force vive à la matière pondérable se manifeste par l'échauffement du conducteur. L'expérience apprend que, dès que la force élec-

tromotrice cesse d'agir, c'est-à-dire dès que le potentiel devient constant, le mouvement de l'électricité s'arrête aussitôt, ce qui est bien d'accord avec cette manière de concevoir le phénomène. Les choses se passent comme lorsqu'un corps se meut dans un milieu résistant dont la densité est très grande par rapport à celle du corps,

Il est naturel de supposer que le flux électrique s'effectue dans la direction même de la force électromotrice $-\frac{dV}{dn}$, c'est-à-dire normalement à la surface de niveau. On suppose en outre qu'il est proportionnel à cette force électromotrice, de sorte que, si l'on désigne par di la quantité d'électricité qui traverse un élément $d\sigma$ d'une surface de niveau dans l'unité de temps, par dn un élément de la normale à cet élément de surface, et par a une constante dépendant de la nature du conducteur, on a

$$di = -a \frac{dV}{dn} d\sigma. \tag{1}$$

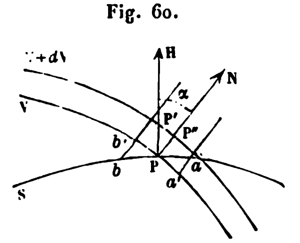
Ceci revient à admettre que la quantité d'électricité qui traverse un élément d'une surface de niveau est proportionnelle à la quantité de force qui traverse cet élément. Cette loi est connue sous le nom de *loi d'Ohm*.

Il résulte de la loi d'Ohm que le flux électrique se propage comme la force dans un canal orthogonal aux surfaces de niveau. La conception idéale de la propagation de la force (n° 170) se traduit ainsi par le phénomène des courants électriques. Si l'on conçoit le volume du conducteur décomposé en une série de canaux orthogonaux ayant pour sections les divers éléments d'une surface de niveau, le flux électrique se propageant dans chacun d'eux séparément, on pourra regarder le mouvement général de l'électricité dans le conducteur comme la réunion de tous ces courants *linéaires*. Le flux électrique dans le voisinage de la surface du conducteur étant parallèle à cette surface, on en conclut que les surfaces de niveau coupent orthogonalement la surface du conducteur.

221. La formule (1) peut être étendue facilement à une surface quelconque S. Soit $d\sigma = ab$ un élément de cette surface,

dn un élément PP′ de la normale PH à cet élément (*fig.* 60), V et V + dV les surfaces de niveau qui passent par les points P et P′: les lignes de force menées par les points du périmètre de l'élément $d\sigma$ forment un canal qui découpe sur la surface V un élément $d\sigma' = a'b'$; le mouvement de l'électricité s'opérant dans ce canal, la quantité d'électricité di qui traverse l'élément ab dans l'unité de temps est égale à celle qui traverse l'élément $a'b'$ dans le même temps; si donc on appelle dn' l'élément PP″ de la normale PN à la surface V, élément compris

Fig. 60.



entre les deux surfaces de niveau V et V + dV, on a, d'après la formule (1),

$$di = -a\frac{dV}{dn'}d\sigma'.$$

Mais, en désignant par α l'angle des deux normales PN et PH, on a $dn' = dn\cos\alpha$, $d\sigma' = d\sigma\cos\alpha$, et la formule précédente devient

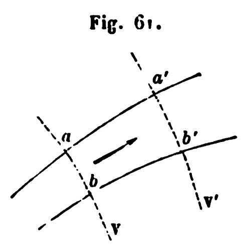
$$(2)\qquad di = -a\frac{dV}{dn}d\sigma.$$

C'est la formule (1) étendue à une surface quelconque. D'après cela, la loi d'Ohm signifie que la quantité d'électricité qui traverse un élément de surface quelconque est proportionnelle à la quantité de force qui traverse cet élément.

222. Nous avons attribué le phénomène des courants au mouvement d'un seul fluide, que ce soit l'éther ou un fluide particulier nommé *électricité*. Dans l'hypothèse des deux fluides électriques, comme la force électromotrice les sollicite également dans des sens contraires, il faudra admettre l'existence dans le même canal orthogonal de deux flux égaux et

ɔntraires, l'un de fluide positif dans le sens de la force élec-'omotrice $-\frac{dV}{dn}$, l'autre de fluide négatif en sens contraire. [ais il est facile de ramener cette manière de concevoir le hénomène à la précédente. Considérons, en effet, la portion u canal orthogonal comprise entre les sections ab et $a'b'$ *fig.* 61) déterminées par deux surfaces de niveau V et V';

Fig. 61.



upposons que ce volume soit primitivement à l'état neutre, 'est-à-dire contienne des quantités égales M des deux fluides; V est plus grand que V', une masse m de fluide positif, tra-ersant la surface ab, entrera dans le volume, et en même emps une masse égale de fluide négatif, traversant la même urface, en sortira; de sorte que le volume contiendra alors ne masse $M+m$ de fluide positif et une masse $M-m$ de uide négatif, c'est-à-dire une quantité d'électricité égale à ur différence $2m$; le résultat est le même que si la quantité m d'un fluide unique avait traversé la surface dans le sens a'. On comprend par là que les deux flux $\frac{1}{2}di$ égaux et con-aires peuvent être remplacés par un seul flux électrique di, ans le sens du flux positif.

223. Dès que le régime normal est établi, les quantités d'é-ctricité qui traversent les sections ab et $a'b'$ d'un canal or-ıogonal par deux surfaces de niveau V et V' sont égales entre les. Les quantités de force qui traversent ces sections, étant roportionnelles aux quantités d'électricité, sont aussi égales ntre elles, et, par conséquent, la somme algébrique des uantités de force qui traversent la surface qui enveloppe le olume $aba'b'$ est nulle; on en conclut, d'après le théorème

du n° 172, qu'il n'y a pas d'électricité libre dans cet élément de volume. Dans l'hypothèse d'un seul fluide, cela signifie que le fluide électrique en mouvement dans le conducteur a partout la densité normale qui constitue l'état neutre par rapport au conducteur donné; dans l'hypothèse des deux fluides, que chaque élément du conducteur contient à chaque instant des quantités égales de fluide positif et de fluide négatif.

Puisqu'il n'y a pas d'électricité libre à l'intérieur du conducteur, on doit admettre que l'électricité nécessaire à la production du potentiel est située à la surface même du conducteur ou à l'extérieur. Dans les expériences ordinaires, lorsque la chaleur ou les actions chimiques donnent naissance à un courant électrique, comme il n'existe pas de masses électriques à l'extérieur, toute l'électricité libre est répandue en une couche infiniment mince à la surface du conducteur. Il faut concevoir que la formation de cette couche électrique précède l'établissement du courant régulier; une fois formée, son potentiel, variable d'un point à un autre, détermine le courant à l'intérieur du conducteur. Mais cette couche n'est pas en équilibre, puisque son potentiel n'est pas constant; il semble donc qu'elle soit elle-même en mouvement à la surface du conducteur.

Conducteurs linéaires.

224. On emploie ordinairement des conducteurs de forme allongée et de section très petite; on pourra, dans ce cas, regarder la section normale ω du conducteur comme un élément d'une surface de niveau et assimiler le fil à un canal orthogonal dans lequel se propage le flux électrique. En appelant i l'intensité du courant, c'est-à-dire la quantité d'électricité qui traverse la section ω du fil pendant l'unité de temps, on a

$$(3) \qquad i = -a\omega\frac{dV}{dn},$$

d'où

$$(4) \qquad \frac{dV}{dn} = -\frac{i}{a\omega};$$

cette équation fait connaître la loi suivant laquelle varie le

potentiel le long du fil. Lorsque la section ω du fil est constante, on peut intégrer, et l'on a

$$(5) \qquad V_1 - V_2 = \frac{i}{a\omega} l,$$

l étant la longueur du fil entre les points 1 et 2 dans le sens du courant; dans ce cas, le potentiel décroît en progression arithmétique. On en déduit

$$(6) \qquad i = \frac{V_1 - V_2}{\frac{l}{a\omega}}.$$

La différence $V_1 - V_2$ des valeurs du potentiel aux deux extrémités du fil est ce que les physiciens appellent *force électromotrice*. Ils ont donné à la quantité constante $\frac{l}{a\omega}$ le nom de ***résistance du conducteur***. Nous la représenterons par λ; de cette manière, l'équation (6) se met sous la forme

$$(7) \qquad i = \frac{V_1 - V_2}{\lambda}.$$

Cette formule a été vérifiée de plusieurs manières :

1° Quand la pile est formée de deux couples au lieu d'un seul, le conducteur restant le même, l'intensité du courant devient double. Il faut, bien entendu, pour faire cette expérience, se mettre à l'abri des causes d'erreur dues à l'introduction d'un nouveau couple dans le circuit.

2° La force électromotrice $V_1 - V_2$ restant la même, si l'on change soit la section, soit la longueur du conducteur, on reconnaît que l'intensité du courant varie proportionnellement à la section, et en raison inverse de la longueur.

225. Lorsque la section ω du fil n'est pas constante, l'équation (4) donne

$$-dV = i\frac{dn}{a\omega}.$$

On peut poser $\frac{dn}{a\omega} = d\lambda$, $d\lambda$ étant la résistance de l'élément dn

du fil; la résistance λ du conducteur entier sera représentée par l'intégrale

$$\lambda = \int_1^2 \frac{dn}{a\omega};$$

de cette manière, l'équation précédente devient

$$-dV = i\,d\lambda,$$

d'où

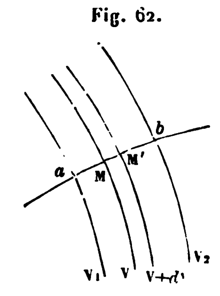
$$V_1 - V_2 = i\lambda, \quad i = \frac{V_1 - V_2}{\lambda}.$$

Cette équation a la même forme que l'équation (7).

Travail des forces électromotrices. — Loi de Joule.

226. Évaluons d'abord le travail de la force $-m\frac{dV}{dn}$, qui agit sur une masse électrique infiniment petite m, décrivant dans le conducteur une ligne ab (*fig.* 62) orthogonale aux

Fig. 62.



surfaces de niveau. Pendant le temps infiniment petit dt, la molécule électrique parcourt un élément $dn = MM'$ normal à une surface de niveau V; le travail élémentaire de la force est donc

$$-m\frac{dV}{dn}\,dn = -m\,dV,$$

et le travail total pour le déplacement ab est

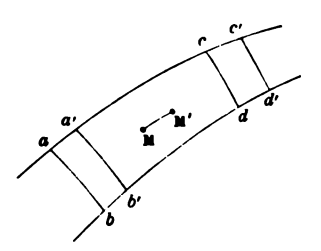
$$m(V_1 - V_2),$$

V_1 et V_2 étant les valeurs du potentiel en a et b.

On voit que ce travail est le même que celui d'un poids m descendant du niveau V_1 au niveau V_2.

227. Considérons maintenant un courant dans un conducteur de forme allongée, et entouré d'un milieu isolant. Soient ab et cd les sections du conducteur par deux surfaces de niveau V_1 et V_2 (*fig.* 63); cherchons le travail effectué pendant

Fig. 63.



un temps infiniment petit dt par les forces électromotrices qui agissent sur la masse électrique comprise entre ces deux surfaces. Au bout du temps dt, cette masse sera venue en $a'b'c'd'$. Une molécule quelconque m a parcouru un petit arc MM', et le travail élémentaire de la force qui agit sur cette molécule est $m(V - V')$, V et V' étant les valeurs du potentiel aux points M et M'. Pour la masse entière, le travail est

$$d\mathfrak{T} = \sum m(V - V') = \sum mV - \sum mV',$$

le signe somme s'étendant à toute la masse considérée. Dans cette expression, V est la valeur du potentiel au point où se trouve une molécule électrique m au temps t, V' la valeur du potentiel au point m' où se trouve la même molécule au temps $t + dt$. La première somme s'étend donc à l'espace $abcd$, la seconde à l'espace $a'b'c'd'$. Puisque le potentiel est indépendant du temps, il est clair que les termes qui se rapportent à la partie commune $a'b'cd$ sont égaux; on peut donc borner la première somme au volume infiniment petit $aba'b'$, la seconde au volume infiniment petit $cdc'd'$. Le potentiel ayant des valeurs sensiblement constantes V_1 et V_2 dans ces

volumes infiniment petits, les deux sommes ont pour expressions

$$V_1 \sum m, \quad V_2 \sum m.$$

Mais les masses comprises dans les deux volumes sont égales; c'est la quantité $i\,dt$ d'électricité qui traverse une section dans le temps dt. On a donc

$$d\mathfrak{T} = (V_1 - V_2) i\,dt.$$

Tel est le travail pendant le temps dt des forces électromotrices qui agissent sur les masses électriques comprises entre les deux surfaces de niveau V_1 et V_2; le travail pendant l'unité de temps est

$$(8) \qquad \mathfrak{T} = (V_1 - V_2)\, i.$$

Ce travail est le même que celui d'un poids i descendant du niveau V_1 au niveau V_2.

228. D'après le théorème général des forces vives, le travail $d\mathfrak{T}$ des forces électromotrices pendant le temps dt est égal à la variation de force vive de la masse électrique considérée *abcd*, plus le travail extérieur accompli. Or ce travail extérieur consiste en une certaine quantité de chaleur communiquée au conducteur, plus le travail nécessaire pour faire varier l'énergie potentielle du conducteur, si celui-ci éprouve quelque changement d'état ou une transformation chimique, plus enfin le travail mécanique extérieur proprement dit, si les pièces du conducteur sont mobiles et accomplissent un travail extérieur. Nous supposerons, pour le moment, que le conducteur n'éprouve aucune variation d'énergie potentielle et n'accomplit aucun travail extérieur. D'un autre côté, comme nous l'avons déjà remarqué (n° 220), la force vive de la masse électrique paraît être très petite et négligeable. On dira donc, dans ce cas, que le travail des forces électromotrices est égal à la quantité de chaleur développée dans le conducteur.

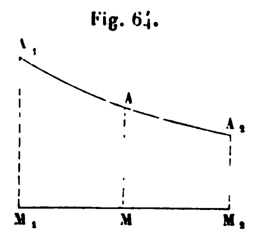
Pour un conducteur linéaire, si l'on remplace $V_1 - V_2$ par sa valeur tirée de l'équation (7), on a

$$(9) \qquad \mathfrak{T} = \lambda i^2.$$

La quantité de chaleur développée dans le conducteur est proportionnelle à la résistance du conducteur et au carré de l'intensité du courant. C'est la loi que M. Joule a trouvée par l'expérience.

229. Nous avons vu que le travail des forces électromotrices, pendant chaque unité de temps, est égal à celui d'un poids i descendant du niveau V_1 au niveau V_2; ceci nous conduit à une manière très simple de représenter le phénomène. Imaginons le conducteur linéaire rectifié suivant M_1M_2 (*fig.* 64),

Fig. 64.



et par chaque point M élevons une ordonnée MA égale à la valeur du potentiel en ce point; nous obtiendrons une courbe A_1AA_2 sur laquelle nous pourrons concevoir que s'accomplit le mouvement du poids i. Lorsque la section ω du conducteur est constante, la variation $V_1 - V_2$ du potentiel étant proportionnelle à la longueur M_1M (n° 224), le courant est figuré par le mouvement du poids sur une droite A_1A_2.

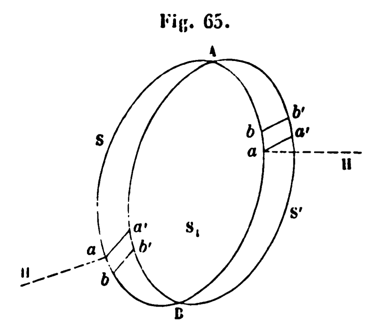
230. Pour compléter cette étude, considérons le mouvement de l'électricité dans un conducteur quelconque; la masse électrique enveloppée par une surface fermée S à l'intérieur du conducteur se déplace et occupe, après le temps dt, une position infiniment voisine S′ (*fig.* 65). Le travail des forces électromotrices qui agissent sur cette masse est

$$d\varpi = \sum m(V - V') = \sum mV - \sum mV',$$

la première somme s'étendant au volume S, la seconde au volume S′; comme on peut supprimer la partie commune, il suffit d'évaluer les termes relatifs aux parties restantes ASB,

AS'B. Dans la première somme, m est la quantité d'électricité qui entre dans le volume S par un élément ab de la partie ASB de la surface; dans la seconde somme, m est la quantité d'électricité qui sort du volume S par un élément $a'b'$ de la partie AS_1B. Si donc on affecte du signe + ou du signe — la

Fig. 65.



quantité d'électricité qui traverse un élément quelconque de la surface S, suivant qu'elle sort ou qu'elle entre dans le volume enveloppé par cette surface, on aura

$$d\mathfrak{T} = -\sum m\mathrm{V},$$

la somme s'étendant à la surface entière. Mais si l'on mène la normale H à chaque élément $d\sigma$ de la surface vers l'extérieur, et si l'on appelle dn un élément de cette normale, la quantité d'électricité qui traverse cet élément dans le temps dt sera exprimée avec le signe convenable par la formule (n° 221)

$$m = -a\,dt\frac{d\mathrm{V}}{dn}\,d\sigma.$$

On aura donc

$$d\mathfrak{T} = a\,dt\sum \mathrm{V}\frac{d\mathrm{V}}{dn}\,d\sigma.$$

Le travail pendant l'unité de temps est

$$\mathfrak{T} = a\sum \mathrm{V}\frac{d\mathrm{V}}{dn}\,d\sigma. \qquad (10)$$

CHAPITRE V.

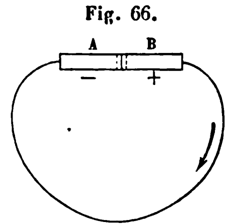
PILE ÉLECTRIQUE.

Principe de Volta. — Mesure des actions chimiques. — Électrolytes et électrolyseurs. — Équivalents électrochimiques. — Théorie de la pile.

Principe de Volta.

231. Volta a admis que le simple contact de deux métaux suffit pour leur donner des états électriques différents; l'un d'eux se charge d'électricité positive, l'autre d'électricité négative. L'hypothèse de Volta est adoptée aujourd'hui par un grand nombre de physiciens, et elle paraît confirmée par l'expérience. On peut énoncer cette hypothèse en disant que le potentiel a sur chacun des métaux A et B en contact une valeur constante, puisque l'équilibre existe dans chacun d'eux, mais que ces deux valeurs V_a et V_b sont inégales. Supposons que l'on ait, par exemple, $V_b > V_a$; si l'on pouvait réunir ces deux métaux par un fil conducteur sans introduire de nouveau contact dans le circuit (*fig.* 66), il se produirait un

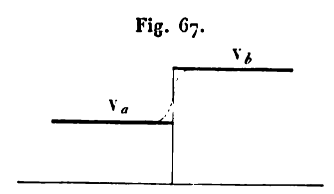
Fig. 66.



courant; mais l'expérience n'est pas possible dans ces conditions : les autres contacts que l'on introduira nécessairement dans le circuit détruiront l'effet du premier.

Nous figurerons cet état des lames en contact par deux droites horizontales V_a et V_b, placées à des hauteurs différentes (*fig.* 67); le potentiel varie très rapidement dans le

Fig. 67.



voisinage du contact. Il est probable que ce changement dans la valeur du potentiel n'a pas lieu brusquement, mais qu'il se produit d'une manière continue entre deux surfaces très voisines de la surface de contact, de même que, dans une bouteille de Leyde à verre mince, le potentiel est constant sur chacune des armatures et passe d'une valeur à l'autre d'une manière continue entre deux points éloignés seulement de l'épaisseur du verre.

232. Le principe de Volta s'applique dans tous les cas, aussi bien au contact des liquides avec les solides, ou des liquides entre eux, qu'au contact des métaux; mais à ce point de vue particulier les corps se partagent en deux classes parfaitement distinctes.

1° Si l'on considère un conducteur formé de plusieurs métaux, à la même température, soudés bout à bout, de manière à constituer une chaîne continue, la différence de potentiel des métaux extrêmes est la même que si ces métaux se trouvaient directement en contact.

Cette loi des *contacts successifs* est une conséquence nécessaire du principe de la conservation de l'énergie. Supposons, en effet, que la chaîne conductrice soit terminée par des métaux identiques A et A′, et qu'il existe entre eux une différence de potentiel. Si l'on ferme le circuit en joignant ces deux métaux par un fil de même nature, ce fil deviendra le siège d'un courant électrique qui se propagera dans le circuit tout entier. Il y aura alors un dégagement de chaleur d'après la loi de Joule, sans aucune dépense équivalente.

2° Toutefois la loi des contacts successifs n'apparaît comme nécessaire que s'il n'existe dans le circuit aucune source d'énergie corrélative du passage de l'électricité. Lorsque ce circuit renferme des liquides, il peut se produire, soit entre les liquides, soit entre eux et les métaux, des réactions qui dégagent de la chaleur et fournissent l'énergie nécessaire à l'entretien du courant. Il n'y a donc pas lieu de s'étonner que les contacts dans lesquels interviennent des liquides n'obéissent pas, en général, à la loi des contacts successifs.

233. Volta a cherché, en associant des conducteurs qui appartiennent aux deux classes précédentes, à constituer un circuit dans lequel il serait possible d'établir entre deux points une différence de potentiel permanente, de manière à obtenir un courant continu.

On appelle *couple* un ensemble de conducteurs terminé par des métaux identiques entre lesquels existe une différence de potentiel. Ce serait le cas, par exemple, d'une chaîne formée par les corps suivants :

cuivre-zinc-eau-cuivre.

Le dernier cuivre est à un niveau électrique plus élevé que le premier et la différence de ces deux potentiels constitue *la force électromotrice du couple*. On voit qu'en ajoutant bout à bout 2, 3, ..., n couples successifs, la différence de potentiel des métaux extrêmes est égale à 2, 3, ..., n fois celle du premier couple. L'ensemble de ces couples constitue une *pile électrique*.

Mesure des actions chimiques.

234. Les phénomènes chimiques sont accompagnés de dégagement ou d'absorption de chaleur, et le plus souvent de courants électriques; ces différents effets sont dus au travail des forces moléculaires, ou des affinités chimiques.

Considérons un mélange de plusieurs éléments, et supposons d'abord qu'il ne soit soumis à aucune action extérieure. Sous l'influence de leurs actions mutuelles, ces éléments peuvent se grouper de différentes manières et prendre plusieurs

états d'équilibre stable, auxquels correspondent différentes valeurs minima de l'énergie potentielle. Le jeu naturel des forces intérieures est de produire un travail positif; par conséquent, quand le système passe d'un état d'équilibre à un autre, il y a toujours diminution de l'énergie potentielle, et, si on laisse le système revenir à la même température, il y a dégagement d'une quantité de chaleur équivalente au travail des forces intérieures ou à la diminution de l'énergie potentielle. Au contraire, pour faire revenir le système du second état au premier, il faut lui fournir une quantité de chaleur équivalente à l'augmentation d'énergie potentielle. Il résulte de là que l'on peut adopter comme mesure de l'action chimique la quantité d'énergie calorifique dégagée ou absorbée pendant la transformation.

Parmi les différents états d'équilibre, il en est un particulièrement remarquable : c'est celui pour lequel l'énergie potentielle est nulle; c'est l'état le plus stable; si le système y arrivait, il ne pourrait plus éprouver aucune transformation par le jeu seul des forces intérieures; pour le tirer de cet état, il faudrait lui communiquer une certaine quantité d'énergie calorifique.

Les phénomènes sont plus complexes lorsque le système est soumis à des forces extérieures, par exemple à une pression uniforme, ce qui est le cas ordinaire. Les différents états d'équilibre que peut prendre le système dépendent de cette pression. Si, après une transformation, c'est-à-dire après le passage d'un état d'équilibre à un autre, on laisse le système revenir à la même température, la variation d'énergie potentielle est égale à la quantité d'énergie calorifique absorbée ou dégagée par le système, plus le travail qui correspond à la pression extérieure.

Les combinaisons chimiques sont accompagnées ordinairement d'un dégagement de chaleur et d'une diminution de volume. Il y a alors une diminution d'énergie potentielle égale à l'excès de l'énergie calorifique dégagée sur le travail de la pression.

Les décompositions s'effectuent ordinairement à l'aide d'une absorption de chaleur, et il se produit en même temps une augmentation de volume. Il y a alors une augmentation d'é-

nergie potentielle égale à l'excès de l'énergie calorifique absorbée sur le travail extérieur accompli par le corps pendant sa dilatation. Toutefois il y a des combinaisons qui sont accompagnées d'une absorption de chaleur, et des décompositions qui s'effectuent avec dégagement de chaleur.

Électrolytes et électrolyseurs. — Équivalents électrochimiques.

235. La considération des quantités de chaleur dégagées ou absorbées dans les opérations chimiques et dans les courants électriques établit un lien, et comme une commune mesure, entre ces deux catégories de phénomènes. Supposons qu'un liquide, renfermant en dissolution un corps composé, soit traversé par un courant électrique constant; sous l'influence du courant, le composé est détruit, les éléments sont transportés en sens opposés, et cette décomposition absorbe une certaine quantité de chaleur, qui est fournie par le courant, c'est-à-dire qui est produite par le travail des forces électriques. Nous avons vu (n° 227) que le travail des forces électromotrices entre deux surfaces de niveau pendant l'unité de temps est égal au produit de l'intensité i du courant par la différence des valeurs du potentiel sur ces deux surfaces. Si donc on appelle Q la quantité de chaleur absorbée par l'opération chimique pendant l'unité de temps, et H l'abaissement du potentiel ou du niveau électrique, à l'endroit où elle s'accomplit, le travail des forces électromotrices étant Hi, on aura l'équation

$$Q = Hi. \tag{1}$$

Inversement, si deux corps susceptibles de se combiner sont placés dans un liquide traversé par un courant, la combinaison s'opère, et elle dégage une certaine quantité de chaleur qui produit une élévation du niveau électrique, à l'endroit où se fait la combinaison. La quantité de chaleur Q dégagée par l'opération chimique pendant l'unité de temps et l'élévation H du potentiel sont encore liées par la relation $Q = Hi$. Cette équation peut être appliquée aux deux cas de la question, si l'on convient de regarder l'action chimique comme

positive ou négative, suivant qu'elle dégage ou absorbe de la chaleur, et la variation du potentiel dans le sens du courant comme positive ou négative, suivant qu'il y a élévation ou abaissement.

Ce sont ces réactions chimiques, corrélatives du passage de l'électricité, qui fournissent l'énergie nécessaire à l'entretien du courant produit par les couples électriques à liquides.

[illegible]. PREMIÈRE LOI EXPÉRIMENTALE. — *Pour des corps donnés, [illegible] combinés dans le même temps [illegible] à l'intensité du courant.*

La quantité de chaleur absorbée ou dégagée est [illegible] proportionnelle au poids décomposé ou [illegible]. D'après la loi précédente, elle est donc proportionnelle à l'[illegible] mais cette quantité est égale à H [illegible]

[illegible]

[illegible]

pour les corps qui se combinent sur le passage d'un courant électrique.

En généralisant cette loi de Faraday, on peut définir les *équivalents électrochimiques* de tous les corps : ce sont les poids de ces corps qui se combinent ou se dissocient, pendant l'unité de temps, sur le trajet d'un courant dont l'intensité est égale à l'unité.

Théorie de la pile.

238. Considérons un couple alimenté par la dissolution du zinc dans un liquide quelconque. Appelons q la quantité de chaleur produite par la dissolution d'un kilogramme de zinc dans le liquide, et a l'équivalent électrochimique du zinc, c'est-à-dire le poids du zinc qui se dissout pendant l'unité de temps sur le trajet d'un courant dont l'intensité est égale à l'unité. Lorsque l'intensité du courant est i, le poids de zinc dissous est ai, et l'action chimique correspondante qai. Si la pile est formée de n couples placés les uns à la suite des autres, et par conséquent traversés par le même courant, l'action chimique est $naqi$.

Supposons les deux pôles de la pile réunis par un fil conducteur homogène et à la même température dans toute sa longueur; appelons λ' la résistance du fil et λ'' celle de chacun des couples de la pile; la résistance totale du circuit sera $\lambda = \lambda' + n\lambda''$. En égalant l'action chimique de la pile à la quantité d'énergie calorifique qui se dégage dans le circuit fermé, on a l'équation

$$naqi = \lambda i^2, \tag{2}$$

d'où l'on déduit

$$i = \frac{naq}{\lambda},$$

ou

$$i = \frac{naq}{\lambda' + n\lambda''}. \tag{3}$$

Lorsque le nombre des couples n'est pas trop grand et que

la résistance $n\lambda''$ de la pile est très petite par rapport à celle du fil, on a approximativement

$$(4) \qquad i = \frac{naq}{\lambda'};$$

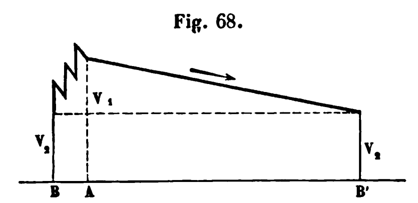
l'intensité est à peu près proportionnelle au nombre des couples.

Remarquons que l'intensité du courant n'augmente pas indéfiniment avec le nombre des couples de la pile; elle tend vers une limite finie

$$(5) \qquad i = \frac{aq}{\lambda''}.$$

239. Nous pouvons suivre aisément les variations du potentiel dans cet appareil. Supposons, pour simplifier, que l'action chimique de chaque couple de la pile se manifeste sur une de ses faces, par exemple sur la première face, dans le sens du courant (*fig.* 68); elle produira en ce point une élévation de

Fig. 68.



niveau h qui sera donnée par l'équation $qai = hi$, d'où $h = aq$; mais, en traversant l'épaisseur du liquide qui remplit le vase, le courant éprouve ensuite une perte de niveau égale à $\lambda'' i$; de sorte que l'élévation provenant du premier couple sera égale seulement à la différence $aq - \lambda'' i$. L'élévation provenant de la pile entière sera $naq - n\lambda'' i$. Si donc on désigne par V_1 la valeur du potentiel au pôle positif de la pile, et par V_2 sa valeur au pôle négatif, on aura

$$V_1 - V_2 = naq - n\lambda'' i.$$

Le potentiel diminue ensuite le long du fil, depuis le pôle positif jusqu'au pôle négatif. L'élévation naq produite par les actions chimiques est *la force électromotrice de la pile.* En

galant cette quantité à la perte de niveau due à la résistance e tout le circuit, on a

$$naq = \lambda i = (\lambda' + n\lambda'')i,$$

t l'on retrouve ainsi l'équation (3).

240. Supposons maintenant qu'on place un électrolyte sur e trajet du conducteur. Soit a' l'équivalent électrochimique lu composé dissous et q' la quantité de chaleur nécessaire)our décomposer 1 kilogramme de ce corps; le poids décom-)osé pendant l'unité de temps est $a'i$, et la chaleur absorbée $a'q'i$. L'action chimique de la pile étant égale ici à l'énergie :alorifique qui se dégage dans le circuit fermé, plus celle qui 1 servi à décomposer l'électrolyte, on a l'équation

$$naqi = \lambda i^2 + a'q'i,$$

)ù λ désigne la résistance de tout le circuit, y compris l'élec- :rolyte. On en déduit

$$i = \frac{naq - a'q'}{\lambda}. \tag{6}$$

Nous remarquons d'abord que la présence de l'électrolyte liminue l'intensité du courant; elle produit à cet endroit un ιbaissement du niveau électrique. Nous voyons ensuite que,)our que le courant existe, il faut que la condition $naq > a'q'$ oit remplie, c'est-à-dire que l'action chimique de la pile soit lus grande que celle de l'électrolyte : c'est ce que l'expé- ience a vérifié. En augmentant le nombre des couples de la ile, on peut toujours effectuer la décomposition.

241. Si l'on place dans le circuit plusieurs électrolytes, u'on appelle $a', a'', \ldots$ leurs équivalents électrochimiques, : $q', q'', \ldots$ les quantités de chaleur nécessaires pour la dé- omposition de 1^{kg} de ces différents corps, on aura de même

$$naqi = \lambda i^2 + a'q'i + a''q''i + \ldots,$$

où l'on déduit

$$i = \frac{naq - (a'q' + a''q'' + \ldots)}{\lambda}.$$

La résistance totale λ du circuit comprend la résistance de la pile, celle du fil conducteur, plus les résistances λ_1, λ_2,... des différents électrolytes,

$$\lambda = \lambda' + n\lambda'' + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots.$$

Pour que le courant existe, il faut encore que l'on ait

$$naq > a'q' + a''q'' + \ldots,$$

c'est-à-dire que l'action chimique de la pile soit plus grande que la somme des actions chimiques des électrolytes.

CHAPITRE VI.

COURANTS THERMO-ÉLECTRIQUES.

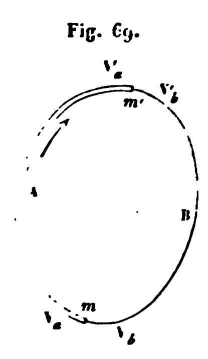
·ience de Seebeck. — Phénomènes d'inversion. — Hypothèse de M. Tait. — Expérience de Peltier.

Expérience de Seebeck.

2. La différence des niveaux électriques, qui existe au ıct de deux métaux, dépend essentiellement de la tempé·e; elle est ordinairement d'autant plus grande que la ıérature est plus élevée. Si l'on forme un circuit avec métaux réunis par deux soudures, ce circuit ne peut traversé par un courant que si la différence des niveaux riques n'est pas la même aux deux points de contact. Le ›n le plus simple de rendre ces différences de niveau iné- est de porter l'une des soudures à une température plus ›e que l'autre; c'est l'expérience de Seebeck.

ient donc deux métaux A et B soudés aux deux points m

Fig. 69.



' (*fig.* 69), la première soudure étant à la température t, conde à une température plus élevée t'. Appelons V_a et

V'_a les valeurs du potentiel sur le métal A aux points m et m', V_b et V'_b les valeurs sur le métal B aux mêmes points. Supposons les deux métaux de telle nature qu'au point de contact le potentiel ait sur le second une valeur plus grande que sur le premier, c'est-à-dire que les deux différences $V'_b - V'_a$, $V_b - V_a$ soient positives, et admettons que le courant parcoure le métal A en allant de m vers m'; désignons par λ_a et λ_b les résistances des conducteurs A et B, et par λ la résistance totale $\lambda_a + \lambda_b$ du circuit. L'intensité du courant a pour expression dans le conducteur A

$$i = \frac{V_a - V'_a}{\lambda_a},$$

et dans le conducteur B

$$i = \frac{V'_b - V_b}{\lambda_b}.$$

Ces deux quantités étant égales, on en déduit

$$i = \frac{V_a - V'_a}{\lambda_a} = \frac{V'_b - V_b}{\lambda_b} = \frac{(V'_b - V'_a) - (V_b - V_a)}{\lambda}.$$

Si l'on pose

$$H = V_b - V_a, \quad H' = V'_b - V'_a,$$

on obtient la formule

$$(1) \qquad i = \frac{H' - H}{\lambda}.$$

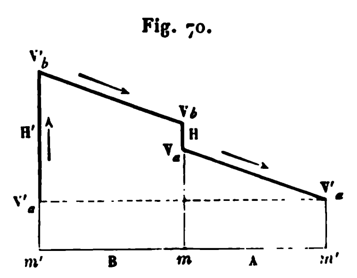
Lorsque les deux soudures sont à la même température, on a $H = H'$, et, par suite, $i = 0$; le courant est nul. Mais, si la soudure m' est à une température plus élevée que m, la différence H' est plus grande que H, et le courant a lieu dans le sens indiqué par la flèche.

243. Le phénomène sera figuré de la manière suivante: imaginons le circuit rectifié suivant $m'mm'$ (*fig.* 70); au point de contact m', le poids d'électricité i a été élevé du niveau V'_a au niveau V'_b; il descend ensuite, comme sur un plan incliné, jusqu'au niveau V_b; là, au point de contact m, il tombe du niveau V_b au niveau V_a, et revient, par un second plan in-

cliné, au niveau primitif V'_a; puis recommence indéfiniment le même mouvement.

Dans le voisinage du contact m', le travail des forces électromotrices est négatif et égal à $i(V'_a - V'_b) = -iH'$. Pour maintenir la température constante, il faudra placer là un corps extérieur K_2 à la température t', qui fournisse, pendant chaque unité de temps, une quantité de chaleur équivalente $Q_2 = iH'$. Au contraire, dans le voisinage du contact m, les

Fig. 70.



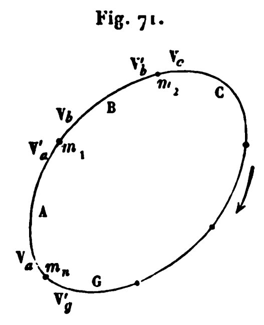
forces électromotrices produisent un travail positif et égal à $i(V_b - V_a) = iH$; elles développent donc en cet endroit une quantité de chaleur $Q_1 = iH$, qu'on pourra absorber par un corps extérieur K_1 à la température t, et placé à cet endroit. Il se dégage en outre le long des conducteurs A et B des quantités de chaleur égales à $i(V_a - V'_a)$ et $i(V'_b - V_b)$. Ainsi il entre dans le circuit une quantité de chaleur Q_2 par la soudure m', et il en sort une quantité Q_1 par la soudure m; la différence $Q_2 - Q_1$ est transformée en un travail électrique, qui lui-même se change en chaleur se dégageant le long de l'arc conducteur. Il est évident que la quantité $Q_2 - Q_1$ est égale à celle qui se dégage sur les conducteurs.

L'ensemble de deux métaux dont les soudures sont maintenues à des températures différentes constitue un *couple thermo-électrique*.

244. Considérons maintenant un circuit formé d'un nombre n quelconque de métaux A, B, ..., G, soudés en $m_1, m_2, \ldots$, et supposons que le courant marche dans le sens indiqué par la flèche (*fig.* 71). Si nous désignons par V_a et V'_a les valeurs du potentiel sur le métal A aux points m_n et m_1, par V_b et V'_b

les valeurs du potentiel sur le métal B en m_1 et m_2, et ainsi de suite, et si nous appelons, comme précédemment, λ_a, λ_b, ...,

Fig. 71.



λ_g les résistances des différents métaux et λ la résistance totale, nous aurons

$$i = \frac{V_a - V'_a}{\lambda_a} = \frac{V_b - V'_b}{\lambda_b} = \ldots = \frac{V_g - V'_g}{\lambda_g},$$

d'où, en combinant par addition ces rapports égaux,

$$i = \frac{(V_b - V'_a) + (V_c - V'_b) + \ldots + (V_a - V_g)}{\lambda}.$$

Si l'on pose

$$H_{ab} = V_b - V'_a, \quad H_{bc} = V_c - V'_b, \quad \ldots,$$

cette équation devient

$$i = \frac{H_{ab} + H_{bc} + \ldots + H_{ga}}{\lambda}$$

ou, plus simplement,

$$(2) \qquad i = \frac{\Sigma H}{\lambda}.$$

Les différences H de niveau électrique aux soudures sont positives ou négatives; leur somme représente la force électromotrice totale E du circuit. Lorsque cette somme algébrique est positive, le courant marche dans le sens indiqué par la flèche; lorsqu'elle est négative, le courant marche en sens contraire.

La somme algébrique des quantités de chaleur absorbées ou dégagées aux surfaces de contact des métaux est

$$Q = i\Sigma H = \lambda i^2;$$

elle est égale à la quantité qui se dégage le long du circuit (nº 228).

Lorsque toutes les soudures sont à la même température, il ne se produit pas de courant, puisque les métaux obéissent à la loi des contacts successifs (nº 232); on a, dans ce cas, $\Sigma H = 0$, et, par suite, $Q = 0$.

245. Dans un circuit qui renferme un couple thermo-électrique, il y a absorption de chaleur sur une des soudures à la température t' et dégagement de chaleur sur l'autre soudure à la température t. M. Clausius a assimilé cet appareil à une machine à vapeur dans laquelle le corps extérieur K_2 serait le foyer (nº 243), ou la source de chaleur, et K_1 le condenseur ou le réfrigérant, et il lui a appliqué par analogie le théorème de Carnot. Si l'on appelle T_1 et T_2 les températures absolues des soudures m et m', on a

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_1},$$

ou bien

$$\frac{H_2 - H_1}{H_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_1}.$$

Supposons que les températures des deux soudures diffèrent infiniment peu l'une de l'autre, et soient

$$T_1 = T, \quad T_2 = T + dT,$$
$$H_1 = H, \quad H_2 = H + dH,$$

on déduit de l'équation précédente

$$\frac{dH}{H} = \frac{dT}{T},$$
$$\log H = \log aT,$$
$$H = aT,$$

le coefficient a étant un nombre constant pour deux métaux donnés. La différence de niveau électrique qui s'établit au

contact de deux métaux serait donc proportionnelle à la température absolue du contact.

On en déduit encore

$$H_2 - H_1 = a(T_2 - T_1),$$

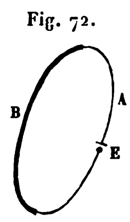
et, par suite,

$$i = \frac{a(T_2 - T_1)}{\lambda}.$$

L'intensité du courant serait proportionnelle à la différence de température des soudures. Cette loi se vérifie en effet quelquefois pour des différences de température très étendues, et l'on dit alors que les deux métaux forment un *couple à marche uniforme.*

246. On peut rendre ce raisonnement plus rigoureux en choisissant des conditions telles que l'appareil constitue une machine réversible. Supposons en effet que le circuit des deux métaux A et B (*fig.* 72), dont les soudures sont aux tempéra-

Fig. 72.



tures T_1 et T_2, soit interrompu en un point du métal A et qu'on y intercale un électrolyte qui donne une force électromotrice E de sens contraire et plus faible. Si l'on appelle λ la résistance totale et i l'intensité du courant, la chaleur $i(H_2 - H_1)$ fournie au système des métaux A et B se partage en deux parties, dont l'une, $i^2\lambda$, échauffe le circuit tout entier et l'autre, iE, se dégage sur l'électrolyte, où elle produit un travail correspondant. On aura donc

$$i(H_2 - H_1) = i^2\lambda + iE.$$

Si la différence $(H_2 - H_1) - E = \alpha$ est très petite, le courant est très faible et le terme $i^2\lambda$ négligeable.

Supposons maintenant que, par un moyen quelconque, on fasse croître la force électromotrice de l'électrolyte jusqu'à une valeur E', de façon qu'on ait $E' - (H_2 - H_1) = \alpha$: le courant change de sens en conservant la même valeur; les réactions chimiques changent de signe et fournissent cette fois un travail iE', d'où résulte un dégagement de chaleur iH_2 sur la soudure chaude et une absorption iH_1 à la soudure froide des métaux A et B.

A part le dégagement de chaleur $i^2\lambda$ qui a lieu le long du circuit, lequel représente une fraction aussi faible qu'on le veut de la chaleur totale mise en jeu, l'appareil se comporte donc comme une machine réversible, fonctionnant entre les températures T_1 et T_2; les quantités de chaleur iH_2 et iH_1, l'une fournie par la soudure chaude, l'autre absorbée par la soudure froide, doivent satisfaire au théorème de Carnot.

Phénomènes d'inversion.

247. Dans la plupart des cas cependant, cette loi ne se vérifie pas. Le courant produit dans un circuit de deux métaux par l'échauffement d'une soudure croît bien à mesure que la température s'élève, mais le rapport de l'accroissement d'intensité du courant à l'accroissement de température va en diminuant. Pour certains métaux, l'intensité du courant passe par un maximum, puis diminue jusqu'à devenir nulle, et le courant peut même changer de signe. Quand on chauffe, par exemple, l'une des soudures d'un circuit formé de cuivre et de fer, l'intensité du courant est maximum lorsque la différence des températures des soudures est voisine de 150°; elle est nulle pour une différence d'environ 300°, et si l'on continue de chauffer, il se produit un courant en sens contraire. Cette *inversion* du courant a été découverte par Cumming.

248. Pour rendre compte des phénomènes d'inversion, il est nécessaire d'étendre le principe de Volta, en admettant que deux parties d'un même métal qui sont à des températures différentes ne jouissent pas des mêmes propriétés électriques et prennent une différence de potentiel quand on les met en contact. Cette différence de potentiel dépend de la na-

ture du métal et des températures des deux parties en contact. Pour un conducteur dont tous les points ne sont pas à la même température, le potentiel varie ainsi d'une manière continue depuis le point le plus chaud jusqu'au point le plus froid.

Considérons un circuit de deux métaux A et B dont les soudures sont aux températures T_1 et T_2. Soit dh l'accroissement de potentiel qui correspond à une variation dt de température, dh_a et dh_b les valeurs de ces accroissements sur les métaux A et B.

Le circuit peut être considéré comme formé d'une série de différents métaux ne présentant de différences de niveau qu'à leurs points de contact successifs. La force électromotrice totale a pour expression

$$E = H_2 - H_1 + \int_{T_1}^{T_2} dh_a - \int_{T_1}^{T_2} dh_b.$$

Si la différence $T_2 - T_1$ des températures est infiniment petite, cette équation devient

$$dE = \frac{dH}{dT} dT + dh_a - dh_b.$$

Lorsque le courant i est très faible, l'appareil peut encore être assimilé à une machine réversible. En appliquant le théorème de Carnot, on obtient l'équation

$$\frac{H_2 i}{T_2} - \frac{H_1 i}{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} i\left(\frac{dh_a}{T} - \frac{dh_b}{T}\right) = 0,$$

qui donne pour des températures infiniment voisines

$$(3) \qquad d\left(\frac{H}{T}\right) + \frac{1}{T}(dh_a - dh_b) = 0.$$

Posons $\frac{dh}{T} = d\mu$, μ étant une fonction de la température caractéristique de chaque métal, à laquelle on peut donner le nom d'*entropie électrique*, et représentons encore par μ_a et μ_b les valeurs de cette fonction pour les métaux A et B. L'équation précédente devient

$$d\left(\frac{H}{T}\right) = d\mu_b - d\mu_a,$$

ou

$$\frac{H}{T} = \mu_b - \mu_a. \tag{4}$$

La différence de potentiel au contact de deux métaux est donc égale au produit de la température absolue par la différence des entropies électriques des deux métaux à la température de la soudure.

En tenant compte de ces équations (3) et (4), on obtient

$$dE = \frac{dH}{dT}dT - T\,d\left(\frac{H}{T}\right) = \frac{H}{T}dT,$$

$$E = \int_{T_1}^{T_2}(\mu_b - \mu_a)\,dT = \int_{T_1}^{T_2}\frac{H}{T}dT. \tag{5}$$

On appelle *point neutre* de deux métaux la température T_n à laquelle ils ont la même entropie. On a alors

$$(\mu_b - \mu_a)_n = 0, \quad \text{et, par suite,} \quad H_n = 0.$$

Au point neutre, deux métaux en contact n'ont aucune différence de potentiel; pour une température constante à la soudure froide du couple formé par les deux métaux, la force électromotrice est alors maximum. Cette interprétation du phénomène est due à M. William Thomson.

Hypothèse de M. Tait.

249. Si l'on admet, avec M. Tait, que l'entropie électrique d'un métal croît proportionnellement à la température, on peut poser, en désignant par A et k_a, B et k_b des constantes caractéristiques des deux métaux,

$$\mu_a = A + k_a T,$$
$$\mu_b = B + k_b T.$$

Avec cette hypothèse, l'équation (4) donne

$$\frac{H}{T} = \mu_b - \mu_a = (B - A) + (k_b - k_a)T;$$

il en résulte pour point neutre

$$T_n = \frac{B - A}{k_a - k_b}$$

et, par suite,

$$\frac{H}{T} = (k_a - k_b)(T_n - T). \tag{6}$$

L'expression de la force électromotrice totale (5) devient alors

$$E = (k_a - k_b)\int_{T_1}^{T_2} (T_n - T)\, dT$$
$$= (k_a - k_b)(T_2 - T_1)\left[T_n - \frac{1}{2}(T_1 + T_2)\right].$$

L'expérience indique, en effet, qu'en désignant par a une constante, la force électromotrice d'un circuit de deux métaux peut être représentée par la formule empirique

$$E = a(T_2 - T_1)\left[T_n - \frac{1}{2}(T_1 + T_2)\right],$$

dans laquelle T_n désigne la température de la soudure chaude qui correspond au maximum d'intensité.

Il en résulte

$$\frac{H}{T} = a(T_n - T),$$

ce qui est conforme à l'hypothèse de M. Tait.

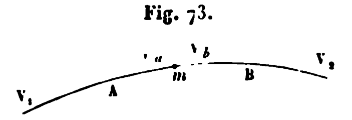
Lorsqu'un couple thermo-électrique est à marche uniforme, le quotient $\frac{H}{T}$ est une constante d'après l'équation (5). Dans ce cas, la différence $\mu_b - \mu_a$ des entropies électriques des deux métaux est constante et la différence de potentiel de contact H est proportionnelle à la température absolue.

Expérience de Peltier.

250. Considérons un arc conducteur formé de deux métaux A et B en contact au point m (*fig.* 73); on fait traverser ce conducteur de A à B par un courant d'une origine quelconque,

et nous supposerons d'abord que le conducteur est à la même température dans toute son étendue. Soient V_1 et V_2 les va-

Fig. 73.



leurs du potentiel aux deux extrémités de l'arc, V_a et V_b les valeurs sur les deux métaux au contact, on aura

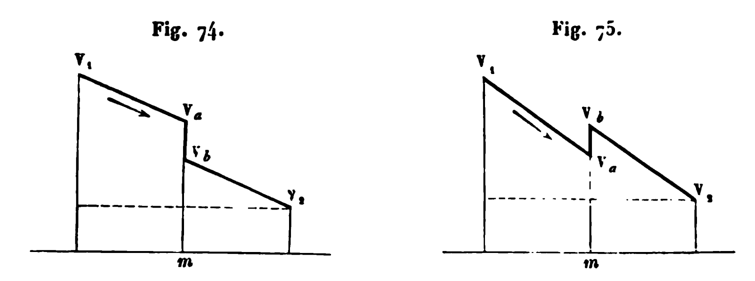
$$i = \frac{V_1 - V_a}{\lambda_a} = \frac{V_b - V_2}{\lambda_b}$$

et, par suite,

$$(7) \qquad i = \frac{(V_1 - V_2) + (V_b - V_a)}{\lambda}.$$

Lorsque la différence de niveau $V_b - V_a$ est négative, comme dans la *fig.* 74, il y a au contact chute électrique, par suite

Fig. 74. Fig. 75.



production d'un travail positif, ou d'une quantité de chaleur $i(V_a - V_b)$.

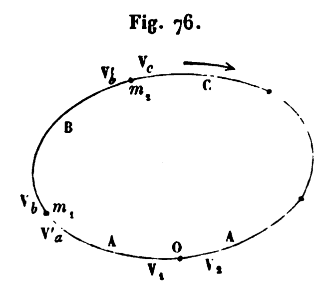
Si un réfrigérant extérieur n'enlève pas cette chaleur à chaque instant, la soudure s'échauffe; c'est un phénomène qui a été observé depuis longtemps.

Au contraire, lorsque la différence $V_b - V_a$ est positive, comme dans la *fig.* 75, l'élévation du poids électrique i du niveau V_a au niveau V_b exige la consommation d'une quantité de chaleur $i(V_b - V_a)$. Si la soudure n'est pas en communication avec une source qui la lui fournisse constamment, la chaleur sera empruntée au conducteur lui-même, et il se pro-

duira au point de contact un abaissement de température. Tel est le phénomène observé par Peltier, et qui était resté longtemps sans explication.

251. Considérons, plus généralement, un arc conducteur formé de plusieurs métaux A, B, C, ..., G, qui se touchent en m_1, m_2, ... (*fig.* 76); on fait passer à travers ce conduc-

Fig. 76.



teur un courant électrique produit par une cause quelconque. Appelons V_1 et V_2 les valeurs du potentiel aux deux extrémités de l'arc, V'_a la valeur du potentiel sur le métal A au contact m_1, V_b et V'_b les valeurs du potentiel sur le métal B en m_1 et m_2, et ainsi de suite; nous aurons

$$i = \frac{V_1 - V'_a}{\lambda_a} = \frac{V_b - V'_b}{\lambda_b} = \ldots = \frac{V_g - V_2}{\lambda_g}$$

et, par suite,

$$(8) \qquad i = \frac{(V_1 - V_2) + H_{ab} + H_{bc} + \ldots H_{fg}}{\lambda}.$$

Pour tenir compte de tous les contacts qui existent dans un circuit fermé, il faut supposer que le dernier métal G est le même que le premier A. En un point O est placée une source d'électricité, par exemple une pile, qui produit en ce point une différence $V_1 - V_2$ dans le potentiel. La formule (8) peut s'écrire plus simplement

$$i = \frac{(V_1 - V_2) + \Sigma H}{\lambda}.$$

Le terme λ renferme en outre la résistance de la pile, si cette résistance n'est pas négligeable.

Lorsque, dans un circuit fermé, tous les contacts sont à la même température (n° 232), on a $\Sigma\Pi =$; la somme algébrique des quantités de chaleur absorbées par les soudures est nulle, et l'intensité du courant est la même que s'il n'y avait pas de contact.

252. Les variations de potentiel qui existent le long d'un conducteur dont les différents points ne sont pas à la même température donnent aussi lieu, lorsque ce conducteur est traversé par un courant, à un dégagement ou à une absorption de chaleur. Ces effets calorifiques sont encore, comme dans le phénomène de Peltier, proportionnels à l'intensité du courant.

Considérons, par exemple, une barre de métal cylindrique dont le milieu est à la température de 100° et les deux extrémités à 0°, et supposons que l'entropie électrique μ de ce métal croisse avec la température, c'est-à-dire que le coefficient k soit positif (n° 249); le potentiel ira en croissant des extrémités de la barre jusqu'au milieu. Si l'on fait passer dans cette barre un courant assez faible pour que l'échauffement dû à la résistance du conducteur soit négligeable, il y aura absorption de chaleur aux points où le potentiel croît dans le sens du courant, c'est-à-dire en avant du point milieu, et dégagement de chaleur de l'autre côté. La symétrie de température qui existait d'abord sera donc détruite et il se produira une sorte de *transport électrique de la chaleur* dans le sens du courant. Le transport a lieu en sens inverse lorsque la valeur de k est négative. M. W. Thomson a vérifié directement cette conséquence, qu'il avait prévue par la théorie.

CHAPITRE VII.

MAGNÉTISME.

Loi de Coulomb. — Aimant élémentaire. — Feuillet magnétique homogène. — Énergie relative de deux feuillets. — Action d'un pôle sur un feuillet. — Action réciproque de deux feuillets.

Loi de Coulomb.

253. On explique les phénomènes magnétiques par une hypothèse identique à celle qui a servi pour rendre compte des phénomènes électriques, en admettant qu'il existe deux fluides magnétiques, analogues aux fluides électriques; l'aimantation consiste dans la séparation des deux fluides, mais, tandis que les fluides électriques peuvent se séparer effectivement et passer d'un corps à l'autre, la séparation des fluides magnétiques ne s'opère que dans les particules du corps, de sorte que chacune d'elles contient toujours des quantités égales des deux fluides. La loi de l'action étant toujours celle du carré de la distance, d'après les expériences de Coulomb, l'action réciproque de deux masses magnétiques m et m' infiniment petites, situées à la distance r, peut être encore représentée par la formule

$$-\frac{mm'}{r^2}.$$

Cette action est négative ou positive, c'est-à-dire répulsive ou attractive, suivant que les deux masses sont de même signe ou de signes contraires, et l'on prend comme unité de masse magnétique une masse telle qu'une masse égale et de signe contraire placée à l'unité de distance exerce sur elle une action égale à l'unité.

Sans qu'il soit nécessaire de répéter les raisonnements déjà

faits au sujet de l'électricité, on voit qu'un système magnétique quelconque peut être défini par son potentiel. Il existe de même des surfaces de niveau magnétiques; la force magnétique, c'est-à-dire l'action qui s'exercerait sur une masse magnétique positive égale à l'unité, est en chaque point normale à la surface de niveau correspondante; les composantes de la force, parallèles aux axes de coordonnées, sont égales et de signes contraires aux dérivées partielles correspondantes du potentiel, etc. En général, tous les théorèmes établis pour l'électrostatique, sauf ceux qui concernent les corps conducteurs, sont également applicables au magnétisme.

Aimant élémentaire.

254. Quelle que soit la distribution des fluides magnétiques dans une molécule aimantée, l'action qu'elle exerce sur une masse magnétique extérieure est la même que si les deux masses magnétiques égales qui y sont séparées par l'aimantation étaient concentrées respectivement en deux points, qui sont les *pôles* de la molécule. La droite qui joint le pôle négatif au pôle positif est l'*axe magnétique* de la molécule, et le produit de la distance des pôles par la masse de l'un d'eux est le *moment magnétique* de la molécule. L'ensemble de deux pôles magnétiques égaux et de signes contraires infiniment voisins constitue un *aimant élémentaire*.

255. Considérons un aimant élémentaire formé de deux masses $+m$ et $-m$ situées aux points a et b, à la distance h (*fig.* 77). Le potentiel de cet aimant en un point P, dont les distances aux points a et b sont r_1 et r_2, a pour expression

$$V = \frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2} = m\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

Si les distances r_1 et r_2 sont très grandes par rapport à h, qu'on appelle r la distance du point P au milieu O de l'aimant et α l'angle que la droite OP fait avec l'axe magnétique ba, on a approximativement

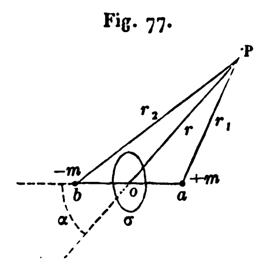
$$r_2 - r_1 = h\cos\alpha, \quad r_1 r_2 = r^2,$$

et, par suite,

$$V = \frac{mh\cos\alpha}{r^2}.$$

Si l'on trace par le point O une surface infiniment petite

Fig. 77.



perpendiculaire à la droite *ba* et dont l'aire σ soit égale en valeur numérique au moment magnétique *mh* de l'aimant, on peut remarquer que l'expression

$$\frac{mh\cos\alpha}{r^2} = \frac{\sigma\cos\alpha}{r^2}$$

représente l'angle solide ω, sous lequel du point P on voit l'aire σ par sa face située du côté du pôle positif. Le potentiel en ce point a simplement pour expression

$$(1) \qquad V = \omega.$$

Feuillet magnétique homogène.

256. Un *feuillet magnétique* est formé par l'ensemble de deux surfaces magnétiques infiniment voisines, chargées sur les éléments correspondants de quantités égales de fluides de signes contraires. Si l'on appelle μ la densité superficielle en un point et *h* la distance normale correspondante des surfaces, le produit $\mu h = \Phi$ est l'*intensité* du feuillet en ce point. Le feuillet est *homogène* lorsque l'intensité est constante dans toute l'étendue du feuillet.

Sur un élément de surface $d\sigma$, la quantité de magnétisme *m* est égale à $\mu\, d\sigma$ et le moment magnétique de l'aimant élé-

mentaire formé par les éléments correspondants des deux surfaces est

$$mh = \mu h\, d\sigma = \Phi\, d\sigma.$$

Considérons un point P situé du côté de la face positive du feuillet. Le potentiel dV, au point P de l'élément $d\sigma$ du feuillet, est l'angle solide sous lequel on verrait de ce point la surface $\Phi\, d\sigma$; il est donc égal au produit de l'intensité Φ par l'angle $d\omega$ sous lequel on voit du point P l'élément $d\sigma$, ce qui donne

$$dV = \Phi\, d\omega.$$

Le potentiel du feuillet est

$$V = \int \Phi\, d\omega,$$

l'intégrale étant étendue au contour du feuillet.

Si le feuillet est homogène, il reste simplement

$$V = \Phi\, \omega. \tag{2}$$

Ainsi le potentiel d'un feuillet magnétique homogène en un point extérieur P est égal au produit de l'intensité du feuillet par l'angle solide sous lequel du point P on voit la surface positive du feuillet.

Cet angle solide est égal à la somme algébrique des quantités de force émanant d'un pôle $+1$ placé au point P, qui traverseraient les éléments du feuillet, en comptant comme positives les quantités de force qui traversent le feuillet de la face positive à la face négative, et comme négatives celles qui traversent le feuillet en sens contraire.

Énergie relative de deux feuillets.

257. Si l'on désigne par m et m' des masses infiniment petites de deux systèmes magnétiques invariables, le travail élémentaire de l'action mutuelle des deux systèmes est (n° **206**)

$$d\mathfrak{T} = -d\sum\sum \frac{mm'}{r} = -dW,$$

l'expression

$$W = \sum \sum \frac{mm'}{r}$$

représentant l'énergie potentielle relative des deux systèmes. On a d'ailleurs

$$W = \sum m' \sum \frac{m}{r} = \sum m' V,$$

V désignant le potentiel du premier système au point où se trouve la masse m' du second.

Si le premier système est un feuillet homogène d'intensité Φ et que ω désigne l'angle solide sous lequel de la masse m' on voit la face positive du feuillet Φ, on a $V = \Phi\omega$ et, par suite,

$$(3) \qquad W = \sum m'\Phi\omega = \Phi \sum m'\omega = \Phi N.$$

Le produit $m'\omega$ étant la quantité de force émanant du pôle m' qui traverse le feuillet Φ, l'expression $\sum m'\omega = N$ est la somme algébrique des quantités de force émanant du second système qui traversent le feuillet.

Entre les deux états (1) et (2), le travail de l'action mutuelle des deux systèmes est

$$(4) \qquad \mathfrak{T} = \Phi(N_1 - N_2).$$

258. Si le second système est aussi un feuillet homogène d'intensité Φ', on aura de même

$$W = \Phi' N',$$

N' étant la somme des quantités de force émanant du premier feuillet qui traversent le second.

Les deux expressions de l'énergie relative donnent la relation

$$\Phi N = \Phi' N'.$$

Si l'on a $\Phi = \Phi'$, il en résulte $N = N'$. Ainsi, pour deux feuillets homogènes d'égale intensité, la quantité de force émanant du second feuillet qui traverse le premier est égale à la quantité de force émanant du premier qui traverse le second.

En désignant par $\mathfrak{M}$ cette quantité de force commune, lorsque l'intensité des feuillets est égale à l'unité, on aura

$$N = \Phi' \mathfrak{M}, \quad N' = \Phi \mathfrak{M}$$

et, par suite,

$$(5) \qquad \begin{aligned} W &= \Phi\Phi' \mathfrak{M}, \\ d\tau &= -\Phi\Phi' d\mathfrak{M}. \end{aligned}$$

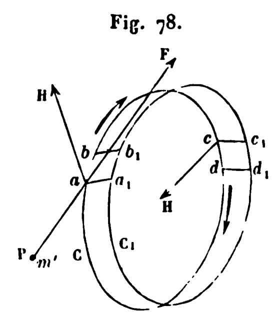
Remarque. — Il résulte de ce qui précède que l'action mutuelle de deux feuillets magnétiques homogènes S et S' ne dépend que de leurs intensités Φ et Φ' et de leurs contours C et C'; elle est indépendante de la forme des surfaces S et S'.

Action d'un pôle sur un feuillet.

259. Théorème I. — *Le système des forces f exercées par un pôle magnétique sur un feuillet homogène* S *peut être remplacé par un système de forces* φ *appliquées aux éléments du contour* C *du feuillet.*

Considérons un feuillet homogène C d'intensité Φ et un pôle magnétique de masse $+m'$ situé au point P (*fig.* 78).

Fig. 78.



Supposons que, le pôle m' restant fixe, le feuillet se déplace infiniment peu, de C en C_1, comme un corps solide; on peut imaginer que la surface du feuillet a une forme telle qu'elle glisse sur elle-même; il suffit, pour cela, de concevoir une surface S passant par les deux courbes C et C_1 qu'occupe suc-

cessivement le contour du feuillet. Si l'on désigne par N et N_1 les quantités de force émanant du pôle m' qui traversent le feuillet dans ses deux positions, la somme des travaux, pendant le déplacement considéré, des forces f appliquées au feuillet est

$$d\mathfrak{T} = \Phi(N - N_1).$$

Comme on peut supprimer la partie de la surface S commune aux deux feuillets, on obtiendra la différence $N - N_1$ en prenant les quantités de force qui traversent des éléments de surface tels que aba_1b_1, limités par les deux positions successives ab et a_1b_1 d'un même élément du contour, et retranchant celles qui traversent les éléments de surface tels que cdc_1d_1. Si l'on mène la normale H à la surface S le long du contour, de façon que, pour les points tels que a, la normale soit dirigée vers la face négative du feuillet, et pour les points c vers la face positive, il suffira, pour évaluer la différence $N - N_1$, de faire la somme algébrique des quantités de force qui traversent les éléments de surface aba_1b_1, cdc_1d_1, dans le sens de la normale H ainsi définie. En appelant $d\sigma$ un de ces éléments de surface, r sa distance au point P, $F = \frac{m'}{r^2}$ la force magnétique produite par le pôle m' sur l'élément $d\sigma$, on aura

$$(6) \qquad d\mathfrak{T} = m'\Phi \int \frac{d\sigma \cos(F.H)}{r^2}.$$

Imaginons qu'un mobile parcoure le contour C dans un sens tel que, pour un observateur placé dans la normale H, l'angle de l'élément ab avec son déplacement aa_1 soit décrit de gauche à droite; la normale au point c, définie précédemment, jouira de la même propriété.

260. Projetons l'élément de surface $d\sigma$ sur un plan perpendiculaire à la droite Pa; cette projection $d\sigma'$ est

$$d\sigma' = d\sigma \cos(F.H).$$

Soient ds l'élément ab du contour (*fig.* 79) compté dans le sens du mouvement du mobile, θ l'angle de la force F avec l'élément ds, $a\varphi$ la normale au plan Fds dans une direction telle

que, pour un observateur situé dans la normale, l'angle θ de l'élément ds avec la force F soit décrit de gauche à droite, enfin ε le déplacement aa_1. La projection $ab'b'_1a'_1$ de la surface $d\sigma$ est

$$d\sigma' = ab' \times ae = ds \sin\theta \times \varepsilon \cos(\varphi.\varepsilon)$$

et, par suite,

$$d\mathfrak{T} = m'\Phi \int \frac{d\sigma'}{r^2} = m'\Phi \int \frac{ds \sin\theta}{r^2} \varepsilon \cos(\varphi.\varepsilon).$$

Concevons suivant la direction $a\varphi$ une force ayant pour expression

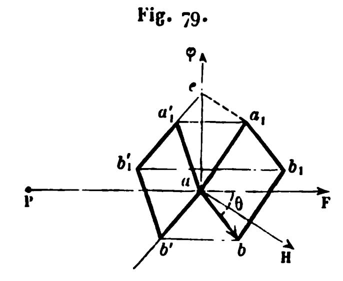
(7) $$\varphi = \frac{m'\Phi\, ds \sin\theta}{r^2},$$

on aura

$$d\mathfrak{T} = \int \varphi\varepsilon \cos(\varphi, \varepsilon),$$

et l'expression comprise sous le signe $\int$ représente le travail de la force φ appliqué à l'élément ds du contour C. La somme

Fig. 79.

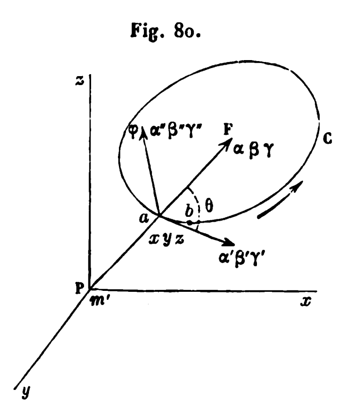


des travaux des forces φ étant égale à celle des travaux des forces f appliquées au feuillet S, pour un déplacement quelconque du feuillet, le système des forces φ est équivalent à celui des forces f, c'est-à-dire se réduit aux deux mêmes résultantes.

Le système des forces $-f$ appliquées au pôle m' admettant une résultante unique, il y a de même une résultante unique pour le système des forces f et, par conséquent, pour le système de forces φ.

261. Pour déterminer les composantes de la force φ, nous appellerons x, y, z les coordonnées d'un point a du contour du feuillet (*fig.* 80); α, β, γ les cosinus des angles que fait

Fig. 80.



avec les axes la force F; α', β', γ' et α'', β'', γ'' les cosinus des angles que font avec les axes l'élément ds et la force φ. Cette dernière direction étant perpendiculaire aux deux autres, on a

$$\frac{\alpha''}{\beta\gamma'-\gamma\beta'}=\frac{\beta''}{\gamma\alpha'-\alpha\gamma'}=\frac{\gamma''}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}=\frac{1}{\sin\theta},$$

ou

$$\frac{\alpha''}{y\,dz-z\,dy}=\frac{\beta''}{z\,dx-x\,dz}=\frac{\gamma''}{x\,dy-y\,dx}=\frac{1}{r\,ds\sin\theta}.$$

Il en résulte pour les composantes φ_x, φ_y, φ_z de la force φ, parallèlement aux axes,

$$(8)\quad \begin{cases} \varphi_x = m'\Phi\,\dfrac{y\,dz-z\,dy}{r^3}, \\ \varphi_y = m'\Phi\,\dfrac{z\,dx-x\,dz}{r^3}, \\ \varphi_z = m'\Phi\,\dfrac{x\,dy-y\,dx}{r^3}. \end{cases}$$

262. On peut vérifier que les forces φ appliquées aux divers éléments du contour C admettent une résultante unique passant par le point P.

Le moment de la force φ par rapport à l'axe des z est

$$x\varphi_y - y\varphi_x = \frac{m'\Phi}{r^3}[x(z\,dx - x\,dz) - y(y\,dz - z\,dy)]$$

$$= \frac{m'\Phi}{r^3}[z(x\,dx + y\,dy) - (x^2 + y^2)\,dz]$$

$$= \frac{m'\Phi}{r^3}[z(x\,dx + y\,dy + z\,dz) - (x^2 + y^2 + z^2)\,dz]$$

$$= \frac{m'\Phi}{r^3}(z r\,dr - r^2\,dz)$$

$$= m'\Phi\,\frac{z\,dr - r\,dz}{r^2} = m'\Phi\,d\left(\frac{z}{r}\right).$$

La somme des moments des forces φ appliquées au contour entier C est donc

$$\int_{(C)}(x\varphi_y - y\varphi_x) = -\,m'\Phi\int_{(C)} d\left(\frac{z}{r}\right) = 0.$$

263. Les forces $-f$ appliquées au pôle m' étant égales et contraires aux forces f appliquées au feuillet, leur résultante est égale et contraire à celle des forces φ; on a donc

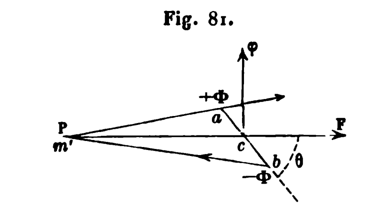
$$(9)\quad \begin{cases} X = -\displaystyle\int_{(C)}\varphi_x = -\,m'\Phi\int\frac{y\,dz - z\,dy}{r^3}, \\ Y = -\displaystyle\int_{(C)}\varphi_y = -\,m'\Phi\int\frac{z\,dx - x\,dz}{r^3}, \\ Z = -\displaystyle\int_{(C)}\varphi_z = -\,m'\Phi\int\frac{x\,dy - y\,dx}{r^3}; \end{cases}$$

chacune des projections s'exprime ainsi par une intégrale simple étendue au contour du feuillet.

264. L'expression de la force φ a été trouvée par Laplace à propos des actions magnétiques exercées par les courants, comme nous le verrons plus loin. Pour interpréter cette force géométriquement, imaginons que l'élément ab du contour

(*fig.* 81) soit remplacé par un aimant élémentaire de longueur ds dont les pôles sont $+\Phi$ et $-\Phi$, et dont l'axe magnétique soit dirigé de b en a, en sens contraire de la direction de l'élé-

Fig. 81.



ment ds. Le moment du couple produit par l'action du pôle m' sur cet aimant tournant autour de son milieu c est égal à

$$\frac{m'\Phi\, ds \sin\theta}{r^2} = \varphi,$$

et le plan du couple est perpendiculaire à la force φ. Cette force représente donc l'axe du couple considéré.

Action réciproque de deux feuillets.

265. Théorème II. — *Le système des forces f exercées par un feuillet magnétique homogène* S′ *sur un feuillet magnétique homogène* S *peut être remplacé par un système de forces* ψ *appliquées à chacun des éléments du contour* C *du feuillet* S *et dirigées suivant les droites qui joignent les éléments des deux contours deux à deux.*

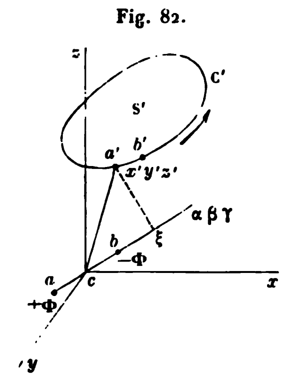
Nous avons vu que les forces f exercées par un pôle m' sur le feuillet S peuvent être remplacées par des forces φ appliquées aux éléments ds du contour C. Considérons les forces φ appliquées à un même élément ds et provenant de divers pôles $\pm m'$ du feuillet S′. Leur résultante est égale à l'axe du couple produit par l'action du feuillet S′ sur l'élément ds considéré comme un petit aimant $(+\Phi - \Phi)$ tournant autour de son milieu. La résultante des actions du feuillet S′ sur le pôle $-\Phi$ a pour projections, en prenant l'origine des coordonnées au milieu c de l'élément ds (*fig.* 82), appelant x', y', z' les

coordonnées de l'élément ds' et r la distance des deux éléments ds et ds',

$$(10)\qquad \begin{cases} X' = \Phi\Phi' \displaystyle\int_{(C')} \frac{y'\,dz' - z'\,dy'}{r^3}, \\ Y' = \Phi\Phi' \displaystyle\int_{(C')} \frac{z'\,dx' - x'\,dz'}{r^3}, \\ Z' = \Phi\Phi' \displaystyle\int_{(C')} \frac{x'\,dy' - y'\,dx'}{r^3}. \end{cases}$$

Si l'on désigne par α, β, γ les cosinus des angles de l'élé-

Fig. 82.



ment ds avec les axes des coordonnées, les cordonnées du point b sont $\alpha\dfrac{ds}{2}$, $\beta\dfrac{ds}{2}$, $\gamma\dfrac{ds}{2}$, et l'axe du couple a pour projection sur l'axe des x

$$\begin{aligned}(\beta Z' - \gamma Y')\,ds \\ &= \Phi\Phi'\,ds \int_{(C')} \frac{\beta(x'\,dy' - y'\,dx') - \gamma(z'\,dx' - x'\,dz')}{r^3} \\ &= \Phi\Phi'\,ds \int_{(C')} \frac{1}{r^3}[x'(\alpha\,dx' + \beta\,dy' + \gamma\,dz') - (\alpha x' + \beta y' + \gamma z')\,dx'].\end{aligned}$$

En appelant ξ la projection de la distance r sur la direction de l'élément ds, on a

$$\xi = \alpha x' + \beta y' + \gamma z',$$
$$d\xi = \alpha\,dx' + \beta\,dy' + \gamma\,dz';$$

et, en substituant,

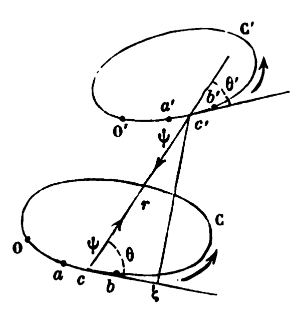
$$(\beta Z' - \gamma Y')\, ds = \Phi\Phi'\, ds \int_{(C')} \frac{x'\, d\xi - \xi\, dx'}{r^3}.$$

D'après cela, la résultante des forces φ appliquées à l'élément ds a pour projections

$$(11)\quad \begin{cases} X = \Phi\Phi'\, ds \displaystyle\int_{(C')} \frac{x'\, d\xi - \xi\, dx'}{r^3}, \\ Y = \Phi\Phi'\, ds \displaystyle\int_{(C')} \frac{y'\, d\xi - \xi\, dy'}{r^3}, \\ Z = \Phi\Phi'\, ds \displaystyle\int_{(C')} \frac{z'\, d\xi - \xi\, dz'}{r^3}. \end{cases}$$

266. Pour transformer les expressions précédentes, nous déterminerons les positions des milieux c et c' (*fig.* 83) de

Fig. 83.



deux éléments ab et $a'b'$ des deux contours par les arcs s et s' comptés à partir de deux points fixes O et O'; la distance r des deux éléments ds et ds', ainsi que sa projection ξ, sont alors des fonctions des deux variables indépendantes s et s'. On peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{x'\, d\xi - \xi\, dx'}{r^3} &= x' r^{-\frac{3}{2}} d\left(\xi r^{-\frac{3}{2}}\right) - \xi r^{-\frac{3}{2}} d\left(x' r^{-\frac{3}{2}}\right) \\ &= 2 x' r^{-\frac{3}{2}} d\left(\xi r^{-\frac{3}{2}}\right) - d\left(x' r^{-\frac{3}{2}} . \xi r^{-\frac{3}{2}}\right); \end{aligned}$$

il en résulte

$$\mathcal{X} = \Phi\Phi' \, ds \int_{(C')} \left[2x' r^{-\frac{3}{2}} d\left(\xi r^{-\frac{3}{2}}\right) - d\left(\frac{x'\xi}{r^3}\right) \right].$$

Le dernier terme de l'intégrale est nul quand on l'étend au contour entier C'; il reste donc

$$\mathcal{X} = 2\Phi\Phi' ds \int_{(C')} \frac{x'}{r} \frac{d\left(\xi r^{-\frac{3}{2}}\right)}{\sqrt{r}} = 2\Phi\Phi' ds \int_{(C')} \frac{x'}{r\sqrt{r}} \frac{\partial\left(\xi r^{-\frac{3}{2}}\right)}{\partial s'} ds'.$$

Désignant par θ l'angle de la droite r avec l'élément ds, on a

$$\xi = r\cos\theta = -r\frac{\partial r}{\partial s},$$

$$\xi r^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{\partial r}{\partial s} = -2\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s},$$

$$\frac{\partial\left(\xi r^{-\frac{3}{2}}\right)}{\partial s} = -2\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'}$$

et, par suite,

$$\mathcal{X} = -4\Phi\Phi' ds \int_{(C')} \frac{x'}{r} \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'} ds'.$$

267. Désignons par

$$\psi = -\frac{4\Phi\Phi' \, ds\, ds'}{\sqrt{r}} \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'}$$

une force appliquée au milieu c de l'élément ds et dirigée suivant la droite cc', qui va de l'élément ds à l'élément ds'; la composante ψ_x de cette force parallèle à l'axe des x étant égale à $\psi\frac{x'}{r}$, il en résulte

$$\mathcal{X} = \int_{(C')} \psi_x;$$

on aurait de même

$$Y = \int_{(C')} \psi_y,$$

$$Z = \int_{(C)} \psi_z.$$

Donc la résultante des forces φ appliquées à l'élément ds est égale à celle des forces ψ appliquées aussi à l'élément ds et dirigées vers les divers éléments ds' du contour C' du feuillet S'. Chacune des forces φ étant normale à l'élément ds, leur résultante et, par conséquent, celle des forces ψ sont aussi normales à l'élément.

On conclut de là que le système des forces f exercées par le feuillet S' sur le feuillet S peut être remplacé par le système des forces ψ appliquées aux éléments du contour C et dirigées suivant les droites qui joignent les éléments deux à deux.

Le système des forces $-f$ exercées par le feuillet S sur le feuillet S' peut de même être remplacé par un système de forces $-\psi$ égales et contraires aux précédentes et appliquées aux éléments du contour C'.

En résumé, tout se passe comme si les éléments ds et ds' des deux contours s'attiraient ou se repoussaient deux à deux avec la force ψ.

268. Les forces ψ appliquées aux deux contours C et C' sont deux à deux des forces égales et contraires, appliquées aux extrémités d'une droite cc' et dirigées suivant cette droite.

Pour évaluer le travail de ces forces, on doit considérer aussi la distance r des deux éléments ds et ds' comme une fonction du temps t. La variation δr de cette distance dans le temps infiniment petit dt sera $\frac{\partial r}{\partial t}dt$, et le travail élémentaire des forces ψ a pour expression

$$d\mathfrak{T} = -\int\int \psi \frac{\partial r}{\partial t} dt = 4\Phi\Phi' dt \int\int \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s \, \partial s'} ds \, ds'$$

ou

$$(12) \qquad d\mathfrak{T} = 8\Phi\Phi' dt \int\int \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial t} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s \, \partial s'} ds \, ds',$$

la double intégration s'étendant aux deux contours C et C' des feuillets.

On peut transformer cette expression. Remarquons d'abord

que l'on a

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}\,\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\right)}{\partial s'} = \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}\,\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'} + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\,\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s'\,\partial t},$$

ce qui donne

$$d\mathfrak{T} = 8\Phi\Phi'\,dt\int_{(C)} ds\int_{(C')}\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}\,\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\right)}{\partial s'} - \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\,\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s'\,\partial t}\right]ds.$$

Le premier terme compris dans la parenthèse, étant une différentielle exacte, donne une somme nulle quand on l'étend au contour entier C'; il reste donc

$$(13)\qquad d\mathfrak{T} = -8\Phi\Phi'\,dt\int\int\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\,\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s'\,\partial t}\,ds\,ds';$$

on aura de même, par symétrie,

$$d\mathfrak{T} = -8\Phi\Phi'\,dt\int\int\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\,\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial t}\,ds\,ds'.$$

En prenant la demi-somme de ces deux expressions, il vient

$$\begin{aligned} d\mathfrak{T} &= -4\Phi\Phi'\,dt\int\int\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\,\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s'\,\partial t} + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\,\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial t}\right)ds\,ds' \\ &= -4\Phi\Phi'\,dt\int\int\frac{\partial\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\,\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\right)}{\partial t}\,ds\,ds' \\ &= -4\Phi\Phi'\,\delta\int\int\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\,\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\,ds\,ds'. \end{aligned}$$

Posons

$$(14)\qquad \mathrm{W} = -4\int\int\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\,\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\,ds\,ds';$$

il en résulte

$$d\mathfrak{T} = \Phi\Phi'\,d\mathrm{W}.$$

Le travail des forces magnétiques f qui s'exercent entre

deux feuillets magnétiques homogènes s'exprime ainsi par une intégrale double s'étendant aux deux contours.

L'énergie potentielle relative des deux feuillets a pour valeur $\Phi\Phi'$W. Si l'on compare cette expression avec celle qui a été trouvée au n° 258, on voit qu'il en résulte

$$W = -\mathfrak{M}.$$

La fonction W est donc égale et de signe contraire à la quantité de force émanant d'un feuillet qui traverse l'autre lorsque les deux intensités sont égales à l'unité.

269. La fonction W peut être mise sous plusieurs formes différentes. On a d'abord

$$(15) \qquad W = -\int\int \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} ds\, ds'.$$

On a vu plus haut (n° 266) que l'angle θ que fait la droite cc' ou r avec l'élément ds donne la relation

$$\cos\theta = -\frac{\partial r}{\partial s};$$

appelant de même θ' l'angle que fait cette droite avec l'élément ds', on a aussi

$$\cos\theta' = \frac{\partial r}{\partial s'},$$

d'où l'on déduit

$$(16) \qquad W = \int\int \frac{\cos\theta \cos\theta'}{r} ds\, ds'.$$

On peut écrire encore

$$W = \int\int r \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'} ds\, ds'.$$

En intégrant cette expression par parties par rapport au contour C', il vient

$$\int r \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'} ds' = \frac{\partial r}{\partial s} - \int \frac{1}{r} \frac{\partial \left(r \frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'} ds'.$$

Le premier terme du second membre, intégré ensuite par rapport à s, donne une somme nulle quand on l'étend au contour C; on a donc

$$W = -\int\int \frac{1}{r} \frac{\partial\left(r \frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'} ds\, ds'.$$

La projection ξ de la distance r sur la tangente à l'élément ds est

$$\xi = r\cos\theta = -r\frac{\partial r}{\partial s}.$$

Si l'on fait varier l'arc s' de ds' en laissant ds constant, l'accroissement de la projection ξ de la distance des deux points considérés sera

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial s'} ds'.$$

D'autre part, cet accroissement représente la projection de l'élément ds' sur la direction de l'élément ds. En appelant ε l'angle que font les deux éléments, on a

$$d\xi = ds' \cos\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial s'} ds'$$

et, par suite,

$$\cos\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial s'} = -\frac{\partial\left(r \frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'}.$$

En substituant dans la valeur de W, il vient

$$(17) \qquad W = \int\int \frac{\cos\varepsilon}{r} ds\, ds'.$$

CHAPITRE VIII.

ÉLECTROMAGNÉTISME ET ÉLECTRODYNAMIQUE.

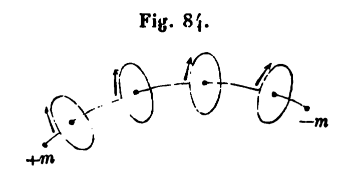
Propriétés magnétiques des solénoïdes. — Assimilation d'un courant à un feuillet magnétique. — Action réciproque de deux courants. — Formule d'Ampère. — Travail des forces électrodynamiques. — Théorie du magnétisme d'Ampère.

Propriétés magnétiques des solénoïdes.

270. La découverte d'Œrstedt a établi une relation importante entre les courants électriques et le magnétisme. Si l'on place un pôle magnétique dans le voisinage d'un courant, il subit une action proportionnelle à sa masse, dans une certaine direction si la masse est positive et dans la direction opposée si la masse est négative. En d'autres termes, un courant produit en chaque point une force magnétique entièrement comparable à celle qui résulterait d'un système d'aimants; cette force est d'ailleurs proportionnelle à l'intensité du courant et change de signe avec le sens du courant.

Pour établir les lois des *actions électromagnétiques* qui se manifestent entre les courants et les aimants, nous considérerons d'abord le cas d'un *courant élémentaire*, c'est-à-dire d'un courant fermé qui entoure une surface infiniment petite.

Fig. 84.



Un ensemble de courants élémentaires (*fig.* 84) égaux entre eux et de même sens, normaux à une même courbe di-

rectrice, infiniment rapprochés et à la même distance les uns des autres, constitue un *solénoïde*.

271. On peut considérer comme un fait expérimental que l'action magnétique d'un solénoïde est équivalente à celle d'un aimant linéaire dont les pôles seraient situés aux deux extrémités de la courbe directrice. La masse magnétique des pôles du solénoïde est proportionnelle à l'intensité du courant, à l'aire σ de la surface d'un des courants élémentaires et en raison inverse de la distance h de deux courants successifs. Quand on change le sens du courant, les pôles changent de signe. La masse de chaque pôle a donc pour expression

$$m = a\frac{i\sigma}{h}, \tag{1}$$

le coefficient a étant une constante.

Si l'on divise le solénoïde, chacun des tronçons a de même à ses extrémités deux pôles égaux à $\pm m$. D'après cela, chacun des courants élémentaires peut être assimilé à un petit aimant de longueur h, de masses $\pm m$ et dont le moment magnétique est

$$mh = ai\sigma.$$

Le moment magnétique de l'aimant qui équivaut à un courant élémentaire est donc proportionnel au produit de l'intensité par la surface du courant.

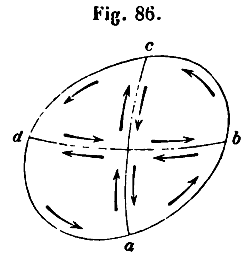
Fig. 85.

La direction de l'axe magnétique de cet aimant est déterminée par la règle suivante : un observateur placé sur une normale au plan du courant et voyant le courant marcher de gauche à droite a sa tête au pôle négatif (*fig.* 85).

Assimilation d'un courant à un feuillet magnétique.

272. En suivant cet ordre d'idées, on peut trouver un système magnétique équivalent à un courant fermé de forme quelconque et d'intensité i. Imaginons une surface S limitée au courant; divisons cette surface en éléments et supposons que le contour de chacun d'eux soit parcouru par un courant d'intensité i, dans un sens tel qu'un observateur situé sur une normale à la surface voie tous les courants tourner dans le même sens. L'ensemble de ces courants élémentaires constitue le courant proposé, car chacune des lignes intérieures séparant deux éléments (*fig.* 86) appartient à deux contours

Fig. 86.



contigus et est parcouru en sens contraires par les courants relatifs à ces deux contours; il ne reste que les portions extérieures ab, bc, ..., qui forment le courant proposé. Chacun de ces petits courants, de surface $d\sigma$, peut être remplacé par un petit aimant dont le moment magnétique est égal à $a i\, d\sigma$, c'est-à-dire proportionnel à l'élément de surface. L'ensemble des courants peut donc être remplacé par un feuillet magnétique homogène (n° 256) dont l'intensité

$$\Phi = ai \tag{2}$$

est proportionnelle à l'intensité du courant.

Ainsi *l'action d'un courant fermé sur un aimant, et en particulier sur un pôle, est la même que celle d'un feuillet magnétique homogène limitée au courant.*

Réciproquement, l'action d'un aimant sur un courant est la même que celle de l'aimant sur un feuillet magnétique.

273. Il en résulte que l'énergie potentielle relative d'un courant constant et d'un système magnétique est égale (n° 257) au produit de l'intensité *ai* du feuillet homogène équivalent par la somme algébrique des quantités de force N émanant du système magnétique qui traversent le courant. Le travail élémentaire des actions électromagnétiques a pour expression

$$d\mathfrak{T} = -\, ai\, dN$$

et le travail de l'action mutuelle du courant et du système magnétique entre les états (1) et (2) est

$$(3) \qquad \mathfrak{T} = ai(N_1 - N_2).$$

274. On a vu (n° 260) que le système des forces magnétiques exercées par un pôle m' sur un feuillet magnétique d'intensité Φ peut être remplacé par le système des forces

$$\varphi = \frac{m'\Phi\, ds \sin\theta}{r^2}$$

appliquées aux éléments du contour. De même, l'action du pôle m' sur un courant d'intensité i peut être remplacé par le système des forces

$$(4) \qquad \varphi = a\frac{m' i\, ds \sin\theta}{r^2}$$

appliquées aux éléments du courant. La force φ est ce qu'on appelle l'*action du pôle sur l'élément de courant.*

Réciproquement, l'action d'un élément de courant sur un pôle a la même valeur prise en signe contraire, et elle doit être considérée comme ayant son point d'application, non sur le pôle, mais sur l'élément de courant.

L'expression de cette loi élémentaire a été déduite par Laplace des expériences de Biot et de Savart relatives à l'action d'un courant rectiligne sur un aimant. L'assimilation des courants aux feuillets magnétiques permet de ramener à des problèmes de magnétisme le calcul des actions qui s'exercent entre des aimants et des courants permanents; cette transformation présente un intérêt réel, parce que les actions des systèmes magnétiques satisfont à la condition des forces centrales, et on peut leur appliquer la méthode du potentiel.

Action réciproque de deux courants.

275. Ampère a établi les lois de l'*électrodynamique*, c'est-à-dire des actions qui se manifestent entre les conducteurs traversés par des courants, en admettant que deux éléments de courant exercent l'un sur l'autre une action dirigée suivant la droite qui les joint, proportionnelle aux intensités des courants et à la longueur des éléments. Des considérations de symétrie permettent de déterminer comment la force est liée aux angles que les éléments font entre eux et avec la droite qui passe par leurs milieux; enfin Ampère démontre, en s'appuyant sur certains cas d'équilibre, que cette force est en raison inverse du carré de la distance.

Au lieu de suivre la méthode d'Ampère, on peut considérer comme un fait expérimental que deux solénoïdes agissent l'un sur l'autre comme deux aimants linéaires. Si i représente l'intensité du courant dans le premier solénoïde, σ l'aire des courants élémentaires et h leur distance, i', σ' et h' les grandeurs analogues du second solénoïde, l'action qui s'exerce entre les extrémités des deux solénoïdes est la même qu'entre les deux masses magnétiques

$$m = a\frac{i\sigma}{h}, \quad m' = a\frac{i'\sigma'}{h'}.$$

Cette relation étant exacte, quelle que soit la longueur des solénoïdes, il en résulte comme cas particulier que deux courants élémentaires se comportent comme deux petits aimants dont les moments magnétiques seraient

$$mh = ai\sigma, \quad m'h' = ai'\sigma'.$$

Si l'on considère deux courants fermés de dimensions quelconques, on pourra de même les remplacer par des feuillets magnétiques uniformes limités aux conducteurs des courants et dont les intensités magnétiques seront respectivement

$$\Phi = ai, \quad \Phi' = ai'.$$

Formule d'Ampère.

276. On a vu (n° 267) que le système des forces magnétiques qui s'exercent entre deux feuillets uniformes S et S′ peut être remplacé par le système des forces ψ dirigées suivant les droites qui joignent deux à deux les éléments ds, ds' des deux contours. Pour obtenir l'action de deux courants, on peut donc aussi considérer le système des forces

$$(5)\qquad \psi = -a^2 \frac{4\, ii'\, ds\, ds'}{\sqrt{r}} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s\, \partial s'}.$$

Cette expression représente ce qu'on appelle l'*action mutuelle des éléments de courant ds et ds′*; c'est la formule d'Ampère.

On peut la mettre aisément sous la forme habituelle. On a, en effet, en conservant aux angles θ, θ' et ε la signification qui leur a été donnée plus haut (n° 269),

$$\cos\theta = -\frac{\partial r}{\partial s}, \quad \cos\theta' = \frac{\partial r}{\partial s'},$$

$$\cos\varepsilon = -\frac{\partial\left(r \dfrac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'} = -\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial s} - r\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}$$

et, par suite,

$$\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta' = \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial s} - r\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}.$$

D'autre part,

$$\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s} = \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial r}{\partial s},$$

$$\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\, \partial s'} = -\frac{1}{4} r^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}$$

ou

$$-\frac{2}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\, \partial s'} = \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - r\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\right] = \cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta';$$

il en résulte

$$(6)\qquad \psi = 2a^2 \frac{ii'\, ds\, ds'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right),$$

c'est-à-dire que l'action de deux éléments est en raison inverse du carré de leur distance quand les angles θ, θ' et ε ne changent pas.

Travail des forces électrodynamiques.

277. Pour déterminer le travail des forces électrodynamiques entre deux courants fermés, nous poserons encore

$$(7)\qquad W = a^2 \int\int \frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\,ds\,ds' = a^2 \int\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds',$$

et le travail élémentaire relatif au déplacement relatif des deux courants a pour expression

$$d\varpi = ii'\,dW.$$

Cette quantité W est ce que M. Helmholtz appelle le potentiel relatif à l'action mutuelle de deux courants d'intensité 1, parcourant les conducteurs dans des sens déterminés. Si l'on change le sens de l'un des courants, $\cos\varepsilon$ change de signe, la valeur de W change elle-même de signe. On a en effet changé de signe les surfaces du feuillet magnétique équivalent au courant considéré.

Théorie du magnétisme d'Ampère.

278. L'analogie si frappante qui existe entre les propriétés des solénoïdes et celles des aimants conduisit Ampère à penser que les phénomènes magnétiques sont produits par des courants électriques. Il assimila les aimants à des solénoïdes et il fit rentrer ainsi le magnétisme dans l'électricité.

Un aimant quelconque peut être considéré comme formé d'une infinité d'aimants très petits, disposés suivant une loi déterminée. Chacun de ces aimants pouvant être remplacé par un courant élémentaire, l'aimant lui-même peut être remplacé par un système de courants. Dans les idées d'Ampère, une molécule magnétique est une molécule autour de laquelle circule un courant électrique élémentaire, et l'aimantation consiste dans la production ou simplement dans l'orientation de ces courants élémentaires.

279. Nous avons vu (n° 195) que l'action que des masses électriques données exercent à l'extérieur d'une surface fermée qui les enveloppe est la même que celle d'une couche de même masse répandue sur cette surface suivant une certaine loi. Les forces magnétiques obéissant aux mêmes lois que les forces électrostatiques, ce théorème est applicable à un système magnétique quelconque, et en particulier à un aimant. Comme la somme algébrique des masses magnétiques dans un aimant est toujours nulle (n° 253), il en résulte que l'action exercée par un aimant sur un point extérieur est la même que celle d'une couche fictive formée de deux parties ayant des masses égales et de signes contraires, distribuées suivant une certaine loi à la surface de l'aimant.

Cette couche fictive peut elle-même être remplacée, pour tout point extérieur, par un système convenable de courants électriques superficiels.

Soient μ la densité de la couche sur un élément dS de la surface de l'aimant, F_1 et F'_1 les composantes normales, comptées à partir de la surface, de l'action qu'elle exerce à l'intérieur et à l'extérieur. La quantité de magnétisme répandue sur l'élément dS est $\mu\, dS$ et la quantité totale de force qui sort d'une petite surface fermée renfermant cet élément est égale à $(F_1 + F'_1)\, dS$. En appliquant le théorème du n° 172, on a

$$4\pi\mu = F_1 + F'_1. \tag{8}$$

Considérons le potentiel intérieur V de la couche et les surfaces de niveau Σ auxquelles la force F est normale. Supposons que sur chacune de ces surfaces on applique des couches magnétiques égales et de signes contraires dont la densité μ en chaque point soit déterminée par la condition

$$\mu = \frac{1}{4\pi} F = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}.$$

L'action extérieure de cet ensemble de surfaces est nulle; le produit $\mu\, dn$ est constant et égal à $-\frac{1}{4\pi} dV$ entre deux surfaces de niveau voisines. Si donc on associe la couche positive de la surface Σ où le potentiel est V avec la couche négative de la surface suivante Σ' où le potentiel est $V - dV$, on constitue un feuillet magnétique homogène dont l'intensité est $\mu\, dn$. Un

courant d'intensité $\frac{\mu\, dn}{a}$ qui suivrait sur la surface de l'aimant la courbe déterminée par l'intersection du feuillet aurait la même action à l'extérieur; on ferait de même pour tous les autres feuillets. Mais, en constituant ce feuillet $\mu\, dn$, on a négligé une couronne de magnétisme négatif correspondant à la différence $\Sigma' - \Sigma$ des deux surfaces, et comme l'action totale du système nouveau est nulle à l'extérieur, on en conclut que la résultante des actions de ces couronnes est égale et de signe contraire à celle des courants superficiels. Si l'on appelle $d\Sigma$ un élément de la couronne $\Sigma' - \Sigma$, dS l'élément de la surface de l'aimant dont il est la projection, on a

$$\frac{F_1}{F} = \frac{F_1}{4\pi\mu} = \frac{d\Sigma}{dS}$$

ou

$$\mu\, d\Sigma = \frac{F_1}{4\pi}\, dS.$$

La quantité de magnétisme négatif qui existe sur l'élément $d\Sigma$, si on la suppose distribuée sur l'élément dS, y produirait une densité égale à $-\frac{F_1}{4\pi}$. L'action extérieure du système considéré de courants superficiels est donc la même que celle d'une couche de masse totale nulle, distribuée à la surface de l'aimant et dont la densité en chaque point serait égale à $+\frac{F_1}{4\pi}$.

On démontrerait de même, en imaginant dans le milieu extérieur des feuillets magnétiques indéfinis, interrompus par la surface S, que l'action extérieure d'une couche de masse nulle, dont la densité μ' est en chaque point égale à $+\frac{F'_1}{4\pi}$, peut être remplacée par celle d'un système convenable de courants superficiels.

L'ensemble de ces deux systèmes de courants forme un nouveau système de courants superficiels qui équivaut, pour tout point extérieur, à une couche magnétique distribuée sur la surface S et dont la densité a pour expression

$$\frac{1}{4\pi}(F_1 + F'_1).$$

Cette densité, d'après l'équation (8), n'est autre chose que celle de la couche fictive.

La distribution des courants superficiels dont l'action extérieure est égale à celle de l'aimant est ainsi déterminée par la forme de la couche fictive équivalente à l'aimant et, par suite, par la distribution du magnétisme à l'intérieur de l'aimant.

Remarquons encore que la surface S peut être une surface fermée enveloppant un système magnétique. On peut donc énoncer ce théorème plus général que l'action d'un système magnétique quelconque à l'extérieur d'une surface fermée S qui l'enveloppe est égale à celle d'un ensemble de courants électriques distribués d'une manière convenable sur cette surface.

CHAPITRE IX.

PHÉNOMÈNES D'INDUCTION.

Action mutuelle de deux courants d'intensités constantes dans des conducteurs fixes. — Formule de Weber. — Action mutuelle de deux courants d'intensités variables dans des conducteurs fixes. — Induction d'un courant sur lui-même par le changement d'intensité. — Induction entre deux courants par le changement d'intensité. — Action mutuelle de deux courants dans des conducteurs mobiles. — Induction d'un courant sur lui-même par le changement de forme du conducteur. — Induction entre deux courants par le mouvement des conducteurs. — Moteurs électriques et machines électromotrices.

Action mutuelle de deux courants d'intensités constantes dans des conducteurs fixes. — Formule de Weber.

280. Nous avons étudié deux catégories principales de phénomènes électriques : les phénomènes d'électricité statique qui sont régis par la loi de Coulomb

$$(a) \qquad -\frac{mm'}{r^2},$$

et les phénomènes électrodynamiques qui sont compris dans la formule d'Ampère (n° 276)

$$(b) \qquad -a^2\frac{4ii'\,ds\,ds'}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'}.$$

La première donne l'action mutuelle de deux masses électriques m et m' au repos, la seconde celle de deux éléments de courant. M. Weber est parvenu à réunir ces deux lois dans une expression plus générale, qui comprend les deux catégories de phénomènes, en admettant que l'action mutuelle de deux masses électriques n'est pas la même suivant que ces masses sont en mouvement ou en repos.

M. Weber raisonne dans l'hypothèse des deux fluides ; dans cet ordre d'idées, on regarde un courant d'intensité i comme formé de deux courants d'électricités contraires, marchant dans des sens opposés avec la même vitesse u, et ayant chacun une intensité égale à $\frac{i}{2}$. Si l'on appelle ω la section très petite du conducteur et k la densité des fluides électriques, la quantité de chacun des fluides qui traverse la section du fil dans l'unité de temps est $k\omega u$; on a alors, pour chacun des courants,

$$\frac{i}{2} = k\omega u$$

et, par suite,

$$i = 2k\omega u.$$

Un élément ds du conducteur contient des masses égales $+m$ et $-m$ de fluide positif et de fluide négatif, et l'on a

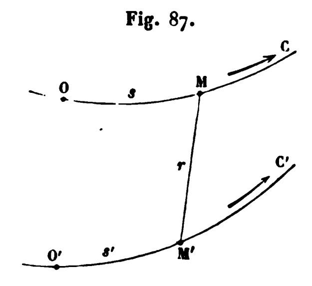
$$m = k\omega ds,$$

d'où

$$(1) \qquad 2mu = i\,ds.$$

281. Considérons deux courants d'intensités constantes i et i' dans des conducteurs fixes C et C' (*fig.* 87), et supposons d'abord que les aires ω et ω' des sections soient constantes; les vitesses u et u' de l'électricité sont alors constantes le long

Fig. 87.



de chacun d'eux. La position d'une masse m de fluide positif se mouvant sur le premier conducteur, avec la vitesse u, dans le sens de la flèche, est déterminée à chaque instant par l'arc s compté à partir d'un point fixe O sur le conducteur.

De même, la position d'une masse m' de fluide positif se mouvant sur le second conducteur avec la vitesse u', dans le sens de la flèche, est déterminée à chaque instant par l'arc s' compté à partir d'un point fixe O' sur ce conducteur.

On doit donc regarder s et s' comme des fonctions du temps, et l'on a

$$\frac{ds}{dt} = u, \quad \frac{ds'}{dt} = u'.$$

La distance r des deux masses en mouvement est une fonction des arcs s et s', et par conséquent une fonction du temps. Il en est de même de la quantité $\sqrt{r}$. On a donc, en différentiant une première fois cette fonction composée,

$$(2) \qquad \frac{d\sqrt{r}}{dt} = \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{ds'}{dt} = u\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s} + u'\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}.$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}$, $\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}$ sont elles-mêmes des fonctions de s et s', et par conséquent des fonctions de t; on aura donc, en différentiant une seconde fois,

$$\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2} = u\left(\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s^2}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'}\frac{ds'}{dt}\right) + u'\left(\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s'^2}\frac{ds'}{dt}\right),$$

$$(3) \qquad \frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2} = u^2\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s^2} + 2uu'\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'} + u'^2\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s'^2}.$$

On en déduit

$$(4) \quad mm'\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2} = mm'\left(u^2\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s^2} + 2uu'\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'} + u'^2\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s'^2}\right).$$

Les masses électriques $\pm m$ et $\pm m'$ en mouvement dans les éléments des conducteurs ds et ds' sont déterminées respectivement par les équations (1)

$$2mu = i\,ds,$$
$$2m'u' = i'\,ds'.$$

La somme des valeurs de l'expression (4) pour les deux combinaisons de la masse $+m$ avec les masses $\pm m'$ est égale

à $4mm'uu'\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'}$, car on doit, en changeant m' en $-m'$, remplacer aussi u' par $-u'$. La somme des valeurs de cette expression pour les deux combinaisons $(-m, \pm m')$ est la même, puisqu'il suffit de changer en même temps les signes de m et de u. Pour les quatre combinaisons $(\pm m, \pm m')$, on aura

$$(5)\qquad \sum mm'\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2} = 8mm'uu'\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'} = 2ii'\,ds\,ds'\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'}.$$

La formule d'Ampère (n° 276) peut donc s'écrire

$$(\mathrm{I})\qquad \psi = -a^2\frac{4ii'\,ds\,ds'}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'} = \sum\left(-\frac{2a^2mm'}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}\right),$$

le signe $\sum$ s'étendant aux quatre combinaisons des masses $\pm m$ de l'élément ds avec les masses $\pm m'$ de l'élément ds'.

Ainsi la force électrodynamique ψ, relative à deux éléments ds et ds' des conducteurs traversés par les courants i et i', peut être regardée comme la résultante de quatre forces

$$-\frac{2a^2mm'}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}$$

s'exerçant entre les masses élémentaires en mouvement dans ces deux éléments, suivant la droite qui les joint.

En y ajoutant la force électrostatique de Coulomb (n° 162), on peut admettre que l'action f' de deux masses électriques m et m' en mouvement a pour expression

$$(c)\qquad f' = -\frac{mm'}{r^2} - \frac{2a^2mm'}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2} = -mm'\left(\frac{1}{r^2} + \frac{2a^2}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}\right).$$

Cette formule de Weber comprend, en effet, les phénomènes électrodynamiques, puisque le premier terme, relatif à l'action électrostatique, disparaît dans la combinaison des masses $(\pm m, \pm m')$ renfermées dans les deux éléments ds et ds'; elle comprend aussi les phénomènes électrostatiques, puisque le dernier terme est nul lorsque la distance des masses est invariable. La loi de Weber présente, en outre, l'avantage

d'expliquer complètement une autre catégorie de phénomènes découverts par Faraday, qui constituent l'*induction électrodynamique*.

282. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que chaque conducteur a une égale section dans toute sa longueur; si la section est inégale, il faudra regarder ω comme une fonction de s; la vitesse u du courant ne sera pas la même aux différents points du conducteur, ce sera aussi une fonction de s. La vitesse u de la masse $+m$ se mouvant dans le conducteur C sera donc variable, et l'on aura

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{ds}\frac{ds}{dt} = u\frac{du}{ds}.$$

On aura de même, sur l'autre conducteur,

$$\frac{du'}{dt} = u'\frac{du'}{ds'}.$$

Quand nous avons différentié l'expression (2) de $\frac{d\sqrt{r}}{dt}$, nous avons regardé u et u' comme des constantes; ces quantités étant maintenant des fonctions du temps, il faudra à l'expression (3) de $\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}$ ajouter les termes

$$\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{du}{dt} + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{du'}{dt}$$

ou

$$u\frac{du}{ds}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s} + u'\frac{du'}{ds'}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'},$$

c'est-à-dire ajouter au second membre de l'équation (4), les termes

$$mm'\left(u\frac{du}{ds}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s} + u'\frac{du'}{ds'}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\right).$$

Quand on considère les deux combinaisons de la masse $+m$ avec les masses $\pm m'$, ces termes additionnels restent les mêmes dans la parenthèse, puisque les facteurs u' et $\frac{du'}{ds'}$ changent de signe en même temps; comme le signe est changé en avant de la parenthèse par le facteur m', ces termes dispa-

raissent dans la somme (5). Ainsi l'inégalité de section ne change pas l'expression de la force électrodynamique.

283. La force exercée par l'élément ds' sur la masse m de l'élément ds est, d'après la formule de Weber,

$$-m\sum m'\left(\frac{1}{r^2}+\frac{2a^2}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}\right),$$

le signe $\sum$ s'étendant aux deux combinaisons de la masse m avec les masses $\pm m'$ de l'élément ds'. Comme le facteur m' change de signe ainsi que la vitesse u' dans l'expression (4), il reste simplement

$$-m'm\frac{2a^2}{\sqrt{r}}4uu'\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'}=-\frac{4a^2mui'ds'}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'}$$

$$=-\frac{2a^2ii'\,ds\,ds'}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'}=\frac{\psi}{2}.$$

L'action totale de ds sur ds' se compose donc de deux forces égales à $\frac{\psi}{2}$ agissant séparément sur les masses $+m$ et $-m$.

284. Il est aisé de vérifier que l'ensemble des forces $\frac{\psi}{2}$ qui agissent sur la masse $+m$ ne modifie pas le mouvement de cette masse dans le conducteur C. En effet, la projection de la force $\frac{\psi}{2}$ sur la trajectoire est

$$\frac{\psi}{2}\cos\theta=\frac{\psi}{2}\frac{\partial r}{\partial s}=-\frac{4a^2mui'ds'}{\sqrt{r}}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'}$$

$$=-8a^2mui'ds'\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'}$$

$$=-4a^2mui'ds'\frac{\partial\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\right)^2}{\partial s'}.$$

La somme des projections de toutes les forces exercées par les différents éléments du courant fermé C' sur la masse $+m$ est

$$-4a^2mui'\int\frac{\partial\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\right)^2}{\partial s'}ds'=-4a^2mui'\left[\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\right)^2\right]_1^2=0.$$

Ainsi la résultante des forces $\frac{\psi}{2}$ qui agissent sur la masse $+m$ est normale à la trajectoire, et par conséquent n'a pas d'influence sur le mouvement de cette masse. Il en est de même pour la masse $-m$.

On conclut de là que le travail des forces ψ qui s'exercent entre deux courants d'intensités constantes, dans des conducteurs fixes, est nul.

Les mêmes conclusions peuvent être appliquées à un courant d'intensité constante agissant sur lui-même dans un conducteur de forme invariable. Ces conséquences résultent d'ailleurs directement de l'assimilation des courants constants aux feuillets magnétiques (n° 275).

Les forces électrodynamiques doivent être considérées comme appliquées aux différents éléments des conducteurs. Il faut concevoir, dans l'hypothèse de Weber, qu'une action mutuelle s'exerce entre les molécules pondérables du conducteur et celles du fluide électrique. L'action qui s'exerce entre l'élément ds du conducteur et la masse $+m$ d'électricité positive se compose de deux forces égales à $\frac{\psi}{2}$ et de sens contraires, l'une $+\frac{\psi}{2}$ appliquée à l'élément ds du conducteur, l'autre $-\frac{\psi}{2}$ à la masse $+m$. L'action qui s'exerce entre l'élément ds du conducteur et la masse $-m$ est la même, $+\frac{\psi}{2}$ sur le conducteur, $-\frac{\psi}{2}$ sur la masse $-m$. Pour maintenir les conducteurs immobiles, on doit leur appliquer des forces extérieures qui fassent équilibre aux forces électrodynamiques.

Action mutuelle de deux courants d'intensités variables dans des conducteurs fixes.

285. Dans ce qui précède, nous avons supposé les intensités constantes et les conducteurs fixes; supposons maintenant que, les deux conducteurs C et C′ restant toujours fixes, les intensités i et i' des courants soient variables. L'intensité i étant variable avec le temps, la vitesse u en un même point

du conducteur sera aussi variable avec le temps. D'ailleurs, si la section est inégale, la vitesse au même instant ne sera pas la même aux différents points du conducteur; u sera donc une fonction de s et de t, et, si l'on considère le mouvement de la masse $+m$, on aura

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

On aura de même, sur le second conducteur,

$$\frac{du'}{dt} = u'\frac{\partial u'}{\partial s'} + \frac{\partial u'}{\partial t}.$$

Il faudra dans l'expression (3) de $\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}$ ajouter les termes

$$\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{du}{dt} + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{du'}{dt},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\left(u\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{dt}\right) + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\left(u'\frac{\partial u'}{\partial s'} + \frac{\partial u'}{\partial t}\right)$$

ou

$$\left(u\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s} + u'\frac{\partial u'}{\partial s'}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\right) + \left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{\partial u'}{\partial t}\right).$$

La première partie, celle qui se rapporte à l'inégalité de la section, disparaît du résultat, comme nous l'avons vu (n° **282**). Examinons l'autre partie qui se rapporte à la variation de l'intensité. Si l'on considère les actions de $+m'$ et de $-m'$ sur $+m$, le terme $\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{\partial u'}{\partial t}$ change de signe le terme précédent $\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t}$ ne change pas; le signe étant changé en avant de la parenthèse dans le second membre de l'équation (4), le premier terme se détruit dans la somme, mais le second s'ajoute. Ainsi l'action de l'ensemble des deux masses $+m'$ et $-m'$ sur $+m$, déduite de la formule de Weber, est augmentée de

$$\psi_1 = -\frac{4a^2mm'}{\sqrt{r}}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{\partial u'}{\partial t}.$$

L'action des deux masses $+m'$ et $-m'$ sur $-m$ est de même augmentée de

$$-\psi_1 = \frac{4a^2mm'}{\sqrt{r}} \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'} \frac{\partial u'}{\partial t}.$$

286. Nous supposerons dans ce qui suit que la densité k du fluide reste constante, et, par conséquent, que la variation d'intensité correspond à une variation de la vitesse du fluide. La relation

$$2m'u' = i'\,ds'$$

donne

$$2m' \frac{\partial u'}{\partial t} = ds' \frac{di'}{dt},$$

et l'on en déduit

$$\psi_1 = -\frac{2a^2m\,ds'}{\sqrt{r}} \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'} \frac{di'}{dt} = -\frac{a^2m\,ds'}{r} \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{di'}{dt}$$

ou

(II) $$\psi_1 = \frac{a^2m\,ds'}{r} \cos\theta' \frac{di'}{dt}.$$

Ainsi l'élément ds' du second courant exerce sur la masse $+m$ une action égale à la somme des deux forces $\frac{\psi}{2}$ et ψ_1 et sur la masse $-m$ une action égale à leur différence $\frac{\psi}{2} - \psi_1$. La somme de ces deux actions est la force électrodynamique ψ qui s'exerce entre les deux éléments ds et ds'; la variation de l'intensité ne change pas l'expression de cette force.

Nous avons vu (n° 284) que la résultante des forces $\frac{\psi}{2}$ qui agissent sur $+m$ ou sur $-m$ est normale à la trajectoire, et par conséquent n'a aucune influence sur le mouvement de ces masses; elle produit simplement une pression contre le conducteur ou l'enveloppe isolante, et constitue la *force électrodynamique* appliquée au conducteur. Il n'en est pas de même des forces $+\psi_1$ qui agissent sur $+m$, et des forces $-\psi_1$ qui agissent sur $-m$; les deux systèmes de forces de cette nature produites par le courant total i' sur les masses $\pm m$ admettent des résultantes égales et opposées, indépendantes

de la direction de l'élément *ds*. Ce caractère distingue nettement les forces ψ_1 des forces électrodynamiques $\frac{\psi}{2}$ qui dépendent essentiellement de la direction des deux éléments entre lesquels elles se manifestent. En général, les résultantes des forces ψ_1 ne sont pas normales à la trajectoire : elles tendent donc à faire mouvoir les deux masses $+m$ et $-m$ dans des sens opposés et, par conséquent, donnent naissance à une *force électromotrice*.

287. La somme des projections des forces ψ_1 sur *ds* est

$$-\int_{(C')} \psi_1 \cos\theta = -ma^2 \frac{di'}{dt} \int_{(C')} \frac{\cos\theta \cos\theta'}{r} ds'.$$

Le travail de ces forces pendant le temps *dt* est

$$-ma^2 u dt \frac{di'}{dt} \int_{(C')} \frac{\cos\theta\cos\theta'}{r} ds' = -\frac{a^2 i ds}{2} dt \frac{di'}{dt} \int_{(C')} \frac{\cos\theta\cos\theta'}{r} ds'.$$

Les forces $-\psi_1$, agissant sur la masse $-m$ de l'élément *ds*, produisent un travail égal; le travail de ces forces sur les masses électriques en mouvement dans le conducteur C, c'est-à-dire sur le courant *i* tout entier, pendant le temps *dt*, est donc

$$d\mathfrak{T}\psi_1 = -a^2 i\, dt \frac{di'}{dt} \int\int \frac{\cos\theta \cos\theta'}{r} ds\, ds'.$$

Si nous représentons encore, comme plus haut (n° 277), par

$$W = a^2 \int\int \frac{\cos\theta \cos\theta'}{r} ds\, ds'$$

le potentiel relatif à l'action mutuelle de deux courants d'intensité 1 parcourant les deux conducteurs, il vient

$$(6) \qquad d\mathfrak{T}\psi_1 = -W i \frac{di'}{dt} dt = -W i\, di'.$$

Tel est le travail des forces électromotrices d'induction qui agissent sur le courant C; ce travail résulte de la variation d'intensité du courant i' dans le conducteur C'.

Le travail des mêmes forces agissant sur le courant C′ est $-\mathrm{W}i'\,di$; il résulte de la variation d'intensité du courant i dans le conducteur C. Le travail de l'action mutuelle des deux courants, ou la somme des deux travaux précédents, est donc $-\mathrm{W}\,d(ii')$.

288. Les mêmes considérations peuvent être appliquées à l'action qu'un courant variable dans un conducteur fixe exerce sur lui-même; il suffit de supposer que les deux courants, dont nous avons calculé l'action mutuelle, deviennent égaux et coïncident. Le travail des forces ψ_1, provenant de l'action du courant C′ sur le courant C, a pour expression $-\mathrm{W}i\,di$; mais il faut remarquer que, dans l'intégrale W, chaque couple d'éléments ds et ds' est compté deux fois : une première fois, quand on regarde l'élément ds comme appartenant au premier conducteur et l'élément ds' au second; une deuxième fois, quand on regarde ds' comme appartenant au premier conducteur, ds au second.

Si l'on pose

$$w = a^2 \sum \frac{\cos\theta \cos\theta'}{r}\, ds\, ds', \tag{7}$$

en ayant soin de ne prendre qu'une fois chaque couple d'éléments, on aura $\mathrm{W} = 2w$, et le travail que le courant exerce sur lui-même aura pour expression $-2wi\,di$ ou $-d(i^2 w)$.

La quantité $i^2 w$ est ce que nous appellerons l'*énergie potentielle du courant;* c'est la quantité de travail que développe le courant dans un conducteur fixe, quand, abandonné à lui-même, son intensité diminue jusqu'à zéro. Inversement, pour produire un courant donné, il faut dépenser une quantité de travail ou d'action chimique égale à l'énergie potentielle du courant.

Il résulte de la nature des choses que le potentiel w d'un courant sur lui-même est une quantité positive. C'est ce qu'on vérifie immédiatement lorsque le conducteur est circulaire; car, dans ce cas, pour chaque couple d'éléments, les deux angles θ et θ' sont égaux.

De même l'énergie potentielle du système de deux courants dans des conducteurs fixes est $i^2 w + i'^2 w' + ii'\mathrm{W}$.

Induction d'un courant sur lui-même par le changement d'intensité.

289. Supposons que dans un conducteur fermé immobile soit interposée une pile variable de force électromotrice égale à E. L'énergie fournie par la pile pendant le temps dt est $\mathrm{E}\,i\,dt$; le travail des forces intérieures est $-2\varpi i\,di$; le travail des forces extérieures qui maintiennent le conducteur immobile est nul. Le théorème des forces vives donne l'équation

$$(8)\qquad d\mathrm{A} + \lambda i^2\,dt = \mathrm{E}\,i\,dt - 2\varpi i\,di,$$

dans laquelle le premier terme représente l'accroissement de la force vive des masses électriques, le second l'énergie calorifique communiquée aux molécules pondérables, de sorte que le premier membre est l'accroissement de la force vive de tout le système. Si nous négligeons, comme nous l'avons fait jusqu'à présent, la force vive des masses électriques, l'équation devient

$$(9)\qquad \mathrm{E}\,i\,dt = \lambda i^2\,dt + 2\varpi i\,di;$$

elle signifie que l'action chimique de la pile est égale à l'énergie calorifique dégagée sur le conducteur, plus l'accroissement d'énergie potentielle du courant.

Si l'on intègre depuis le moment où le courant commence jusqu'à celui où il finit, on a

$$\int \mathrm{E}\,i\,dt = \int \lambda i^2\,dt;$$

l'action chimique de la pile est égale à l'énergie calorifique dégagée sur le conducteur.

290. De l'équation (9) on déduit

$$(10)\qquad \lambda i = \mathrm{E} - 2\varpi \frac{di}{dt}.$$

L'intensité du courant est la même que si l'on appliquait la loi d'Ohm (n° 224), en introduisant à chaque instant dans le

circuit une force électromotrice nouvelle égale à

$$E_1 = -2w\frac{di}{dt};$$

cette quantité E_1 est ce qu'on appelle la *force électromotrice d'induction* du courant sur lui-même.

Considérons la force électromotrice E de la pile comme une fonction du temps et supposons constante la résistance λ du circuit; on peut écrire

$$\lambda i + 2w\frac{di}{dt} = E = \lambda f(t),$$

ou, en posant, pour abréger, $a = \frac{2w}{\lambda}$,

$$(11) \qquad i + a\frac{di}{dt} = f(t).$$

Supposons que la force électromotrice de la pile est d'abord constante jusqu'à l'époque $t = 0$; désignons par i_0 l'intensité initiale du courant

$$i_0 = \frac{E}{\lambda} = f(0),$$

et posons

$$i = f(t) + j;$$

ce terme j représente la variation d'intensité qui correspond à la force électromotrice d'induction, c'est-à-dire l'intensité du courant induit.

En remplaçant i par cette valeur dans l'équation (11), il vient

$$(12) \qquad j + a\frac{dj}{dt} = -af'(t),$$

équation de même forme que la première, mais dans laquelle on a la condition $j_0 = 0$.

L'intégrale de cette équation est

$$j = -\int_0^t f'(\tau)\, e^{-\frac{1}{a}(t-\tau)}\, d\tau,$$

d'où il résulte

$$(13)\qquad i = f(t) - \int_0^t f'(\tau)e^{-\frac{1}{a}(t-\tau)}\,d\tau.$$

Si la force électromotrice de la pile E est croissante, on a

$$f'(\tau) > 0,\quad \frac{di}{dt} > 0.$$

L'intensité i du courant est alors croissante, tout en restant inférieure à la valeur $f(t)$ ou $\frac{E}{\lambda}$, qui correspondrait à l'effet produit par la force électromotrice de la pile seulement, et le courant d'induction j est négatif, c'est-à-dire de sens contraire à celui que produit la pile.

Si la force électromotrice E est décroissante, on a

$$f'(\tau) < 0,\quad \frac{di}{dt} < 0.$$

L'intensité i du courant décroît, tout en restant supérieure à celle qui correspondrait au régime permanent, et le courant d'induction j est positif.

Remarque. — Si, après avoir varié depuis l'époque $t = 0$ jusqu'à l'époque $t = t'$, la force électromotrice E reste ensuite constante, on a, pour des valeurs de t plus grandes que t',

$$j = -\int_0^{t'} f'(\tau)e^{-\frac{1}{a}(t-\tau)}\,d\tau = -e^{-\frac{t}{a}}\int_0^{t'} f'(\tau)e^{\frac{\tau}{a}}\,d\tau,$$

expression qu'on peut écrire

$$j = -be^{-\frac{t}{a}},$$

en posant

$$b = \int_0^{t'} f'(\tau)e^{\frac{\tau}{a}}\,d\tau.$$

Le courant induit j tend alors vers zéro, et le courant principal i tend vers la valeur constante

$$i = \frac{E}{\lambda} = f(t').$$

Induction entre deux courants par le changement d'intensité.

291. Considérons maintenant deux conducteurs fermés C et C′ immobiles, dans lesquels soient interposées des piles de forces électromotrices variables E et E′. Appelons w et w' les potentiels des conducteurs sur eux-mêmes, et W le potentiel relatif à leur action mutuelle. Le travail des forces extérieures qui maintiennent immobiles les conducteurs est nul. Le travail des forces électriques qui s'exercent sur le premier courant est

$$-2wi\,di - \mathrm{W}i\,di' = -d(i^2 w) - \mathrm{W}i\,di';$$

celui des forces qui s'exercent sur le second courant est

$$-2w'i'\,di' - \mathrm{W}i'\,di = -d(i'^2 w') - \mathrm{W}i'\,di.$$

Le théorème des forces vives donne, en négligeant encore les forces vives des masses électriques, les deux équations

$$(14)\qquad \begin{cases} \mathrm{E}i\,dt = \lambda i^2\,dt + 2wi\,di + \mathrm{W}i\,di', \\ \mathrm{E}'i'\,dt = \lambda' i'^2\,dt + 2w'i'\,di' + \mathrm{W}i'\,di. \end{cases}$$

En ajoutant ces deux équations membre à membre, on obtient l'équation

$$(15)\qquad \begin{cases} \mathrm{E}i\,dt + \mathrm{E}'i'\,dt \\ \quad = \lambda i^2\,dt + \lambda' i'^2\,dt + d(i^2 w + i'^2 w' + ii'\mathrm{W}), \end{cases}$$

que l'on pouvait écrire *a priori;* elle signifie que la somme des actions chimiques des piles est égale à l'énergie calorifique dégagée sur les conducteurs, plus l'accroissement de l'énergie potentielle du système. Si l'on intègre cette équation depuis le moment où les courants commencent jusqu'à celui où ils finissent, les termes relatifs à l'énergie potentielle disparaissent; dans ce cas, l'action chimique des piles est égale à l'énergie calorifique dégagée sur les conducteurs.

292. Les équations (14) peuvent s'écrire sous la forme

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda\, i + 2w \frac{di}{dt} + W \frac{di'}{dt} &= E, \\ \lambda' i' + 2w' \frac{di'}{dt} + W \frac{di}{dt} &= E'. \end{aligned} \right.$$

Les forces électromotrices d'induction dans les deux circuits sont respectivement

$$E_1 = -2w \frac{di}{dt} - W \frac{di'}{dt},$$
$$E'_1 = -2w' \frac{di'}{dt} - W \frac{di}{dt}.$$

L'intensité du courant dans chacun des conducteurs, lorsque les forces électromotrices sont variables, ne peut être déterminée qu'en intégrant ces équations (16). Pour avoir une idée de la marche du phénomène, nous supposerons, par exemple, qu'il n'y ait pas de pile interposée dans le second conducteur et que la force électromotrice du premier varie proportionnellement au temps; on peut poser alors

$$E' = 0,$$
$$E = \lambda(a + bt).$$

L'intensité i_1 du courant produit dans le premier circuit par la force électromotrice E est

$$i_1 = a + bt,$$

et l'on a

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} i' &= -\frac{W}{\lambda'} b, \\ i &= i_1 - \frac{2w}{\lambda} b = \left(a - \frac{2w}{\lambda} b\right) + bt. \end{aligned} \right.$$

Ces équations montrent qu'une diminution d'intensité du courant i fait naître dans le conducteur C′ un courant de même sens que celui qui rend W positif, et qu'une augmentation fait naître un courant de sens contraire. Dès que le courant

inducteur i devient constant, i' devient nul et le courant induit cesse d'exister.

293. Supposons encore que les forces électromotrices E et E′ sont constantes, mais qu'on les établit ou qu'on les supprime brusquement à des époques déterminées. Si l'on pose

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} i &= \frac{E}{\lambda} + Ae^{-\alpha t},\\ i' &= \frac{E'}{\lambda'} + Be^{-\alpha t},\end{aligned}\right.$$

les équations (16) donnent, en substituant,

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} (\lambda - 2w\alpha)A - WB\alpha = 0,\\ (\lambda' - 2w'\alpha)B - WA\alpha = 0.\end{aligned}\right.$$

On en déduit

$$(20)\qquad \lambda\lambda'\frac{1}{\alpha^2} - 2(\lambda w' + \lambda' w)\frac{1}{\alpha} + 4ww' - W^2 = 0.$$

Les conditions nécessaires pour que les racines de cette équation soient réelles et positives,

$$(\lambda w' - \lambda' w)^2 + \lambda\lambda' W^2 > 0,$$
$$W^2 < 4ww',$$

sont évidemment satisfaites. Comme on a

$$B = \frac{\lambda - 2w\alpha}{W\alpha}A,$$

il en résulte, en désignant par α_1 et α_2 les racines de l'équation (20), par A_1 et A_2 les valeurs correspondantes de la constante A,

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} i &= \frac{E}{\lambda} + A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t},\\ i' &= \frac{E'}{\lambda'} + \frac{\lambda - 2w\alpha_1}{W\alpha_1}A_1 e^{-\alpha_1 t} + \frac{\lambda - 2w\alpha_2}{W\alpha_2}A_2 e^{-\alpha_2 t}.\end{aligned}\right.$$

Considérons deux cas simples :

1° La force électromotrice E est nulle, le premier circuit étant fermé; fermant alors le second circuit, on y introduit

brusquement la force électromotrice E'; on aura alors $E = 0$, $i_0 = i'_0 = 0$. Après la fermeture du second circuit, le courant a une intensité i' et il se produit par induction dans le premier un courant d'intensité i.

Les équations (21) donnent, pour les conditions initiales,

$$A_1 + A_2 = 0,$$

$$\frac{\lambda - 2w\alpha_1}{W\alpha_1} A_1 + \frac{\lambda - 2w\alpha_2}{W\alpha_2} A_2 = -\frac{E'}{\lambda'};$$

il en résulte, en supposant $\alpha_1 < \alpha_2$,

$$-A_1 = +A_2 = \frac{E' W \alpha_1 \alpha_2}{\lambda\lambda'(\alpha_2 - \alpha_1)},$$

et, par suite,

$$(22)\quad \begin{cases} i = -\dfrac{E' W \alpha_1 \alpha_2}{\lambda\lambda'(\alpha_2 - \alpha_1)}(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}), \\ i' = \dfrac{E'}{\lambda'} - \dfrac{E'\alpha_1\alpha_2}{\lambda\lambda'(\alpha_2 - \alpha_1)}\left[\left(\dfrac{\lambda}{\alpha_1} - 2w\right)e^{-\alpha_1 t} - \left(\dfrac{\lambda}{\alpha_2} - 2w\right)e^{-\alpha_2 t}\right]. \end{cases}$$

La fermeture du second circuit produit dans le premier un courant négatif. Au bout d'un temps très court, le régime permanent s'établit et l'on a

$$i = 0, \quad i' = \frac{E'}{\lambda'}.$$

2° Le courant i' dans le second conducteur ayant acquis sa valeur normale $\frac{E'}{\lambda'}$, on enlève la force électromotrice E', sans changer la résistance du circuit. On a alors

$$E = 0, \quad E' = 0,$$

$$i_0 = 0, \quad i'_0 = \frac{E'}{\lambda'}.$$

Les équations de conditions deviennent

$$A_1 + A_2 = 0,$$

$$\frac{\lambda - 2w\alpha_1}{W\alpha_1} A_1 + \frac{\lambda - 2w\alpha_2}{W\alpha_2} A_2 = \frac{E'}{\lambda'};$$

il en résulte

$$A_1 = -A_2 = \frac{E' W \alpha_1 \alpha_2}{\lambda\lambda'(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

et

$$(23) \quad \begin{cases} i = \dfrac{E' W \alpha_1 \alpha_2}{\lambda\lambda'(\alpha_2 - \alpha_1)}(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}), \\ i' = \dfrac{E' \alpha_1 \alpha_2}{\lambda\lambda'(\alpha_2 - \alpha_1)}\left[\left(\dfrac{\lambda}{\alpha_1} - 2w\right)e^{-\alpha_1 t} - \left(\dfrac{\lambda}{\alpha_2} - 2w\right)e^{-\alpha_2 t}\right]. \end{cases}$$

Le premier conducteur devient alors le siège d'un courant induit positif, de même intensité et de même forme que dans le premier cas, et l'intensité du courant inducteur i' tend rapidement vers zéro.

Action mutuelle de deux courants dans des conducteurs mobiles.

294. Nous avons cherché l'action mutuelle de deux courants d'intensités variables dans des conducteurs fixes; nous allons maintenant supposer les conducteurs mobiles. Le mouvement de la masse électrique $+m$ dans le conducteur C est défini par l'équation $s = f(t)$ (n° 281); de même, le mouvement de la masse électrique $+m'$ est défini par l'équation $s' = f_1(t)$, et l'on a

$$u = \frac{ds}{dt}, \quad u' = \frac{ds'}{dt}.$$

Lorsque les conducteurs sont fixes, la distance r de deux points M et M' de ces conducteurs est une fonction des deux variables indépendantes s et s'; si les conducteurs sont mobiles, la distance r est en outre une fonction du temps, et l'on a $r = \varphi(s, s', t)$. Cette fonction des trois variables indépendantes s, s', t est telle que, si l'on attribue à t une valeur constante, la fonction $\varphi(s, s', t)$ des deux variables indépendantes s et s' représente à cet instant la distance de deux points quelconques M et M' des conducteurs. La même fonction $r = \varphi(s, s', t)$ représentera aussi la distance des deux masses électriques $+m$ et $+m'$, se mouvant sur ces conducteurs

mobiles, si l'on y regarde s et s' comme des fonctions du temps

$$s = f(t), \quad s' = f_1(t).$$

On aura de même

$$\sqrt{r} = \sqrt{\varphi(s, s', t)} = \varphi_1(s, s', t).$$

C'est à ce point de vue qu'il faut se placer pour appliquer la formule de Weber.

295. En différentiant une première fois, on a

$$\frac{d\sqrt{r}}{dt} = \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{ds'}{dt} + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}$$

ou

$$(24) \qquad \frac{d\sqrt{r}}{dt} = u\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s} + u'\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'} + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}.$$

Chacune des dérivées partielles $\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}$, $\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}$, $\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}$ de la fonction $\sqrt{r} = \varphi_1(s, s', t)$ doit aussi être considérée comme une fonction des trois quantités s, s', t. On aura donc, en différentiant une seconde fois,

$$\begin{aligned}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2} = {} & u\left(\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s^2}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'}\frac{ds'}{dt} + \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial t}\right) \\ & + u'\left(\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s'\,\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s'^2}\frac{ds'}{dt} + \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s'\,\partial t}\right) \\ & + \left(\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\,\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\,\partial s'}\frac{ds'}{dt} + \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t^2}\right) \\ & + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{du}{dt} + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{du'}{dt},\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2} = {} & \left(u^2\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s^2} + 2uu'\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'} + u'^2\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s'^2}\right) \\ & + \left(2u\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\,\partial s} + 2u'\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\,\partial s'} + \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t^2}\right) \\ & + \left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{du}{dt} + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{du'}{dt}\right).\end{aligned}$$

Lorsque la section est inégale et l'intensité variable, u est une fonction de s et t, comme nous l'avons expliqué précédemment (n° 282), ce qui donne

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{du'}{dt} = u'\frac{\partial u'}{\partial s'} + \frac{\partial u'}{\partial t}.$$

On a ainsi

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2} = & \left(u^2\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s^2} + 2uu'\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'} + u'^2\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s'^2}\right) \\ & + \left(2u\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\,\partial s} + 2u'\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\,\partial s'} + \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t^2}\right) \\ & + \left(u\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s} + u'\frac{\partial u'}{\partial s'}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\right) \\ & + \left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{\partial u'}{\partial t}\right). \end{aligned}\right.$$

Quand on considère les actions réunies de $+m'$ et de $-m'$ sur $+m$, comme il faut changer le signe de m' et celui de u', les seuls termes de $\dfrac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}$ qui subsistent dans le résultat sont les trois termes

$$2uu'\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'} + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{\partial u'}{\partial t} + 2u'\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\,\partial s'},$$

qui changent de signe avec u'; tous les autres se détruisent. On trouve ainsi que l'action des deux masses $+m'$ et $-m'$, contenues dans l'élément ds', sur la masse $+m$ est

$$-\frac{4a^2mm'}{\sqrt{r}}\left(2uu'\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'} + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{\partial u'}{\partial t} + 2u'\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\,\partial s'}\right).$$

L'action des deux mêmes masses $+m'$ et $-m'$ sur la masse $-m$ sera

$$-\frac{4a^2mm'}{\sqrt{r}}\left(2uu'\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'} - \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{\partial u'}{\partial t} - 2u'\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\,\partial s'}\right).$$

Les deux premiers termes de ces expressions reproduisent

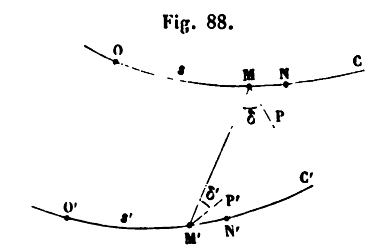
les deux forces $\frac{\psi}{2}$ et $\pm\psi_1$ obtenues précédemment (n° **285**), et la mobilité des conducteurs introduit une troisième force

$$\text{(III)} \qquad \psi_2 = -\frac{4a^2 m i' ds'}{\sqrt{r}} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial t \partial s'},$$

qui est indépendante de la direction de l'élément ds. La somme des actions exercées par l'élément ds' sur les deux masses $+m$ et $-m$ contenues dans l'élément ds est toujours égale à ψ; c'est la force électrodynamique dont l'expression reste la même. Nous avons maintenant deux forces électromotrices : l'une due à la variation de l'intensité, l'autre due au déplacement des conducteurs.

296. Évaluons le travail des forces dans les conditions actuelles. Appelons v et v' les vitesses des points M et M' des conducteurs, δ l'angle de la vitesse v avec la direction MM', δ' l'angle de la vitesse v' avec la direction M'M (*fig.* 88).

Fig. 88.



La masse électrique $+m$ a un double mouvement; elle se meut sur le conducteur C avec la vitesse u, et participe au mouvement du conducteur qui l'entraîne avec lui; son déplacement pendant le temps dt est la résultante des deux déplacements $\text{MN} = u\,dt$, $\text{MP} = v\,dt$. Le déplacement de la masse $-m$ est la résultante des deux déplacements $-u\,dt$ et $v\,dt$.

Les masses électriques $+m'$ et $-m'$ ont de même un double mouvement : leur mouvement propre sur le conducteur C' et le mouvement du conducteur qui les entraîne avec lui; le déplacement de la masse $+m'$ dans l'espace pendant le temps dt est la résultante des deux déplacements $\text{M}'\text{N}' = u'\,dt$ et

$M'P' = v'dt$; le déplacement de la masse $-m'$ est la résultante des deux déplacements $-u'dt$ et $v'dt$.

Or on sait que le travail d'une force pour un déplacement résultant est égal à la somme des travaux relatifs aux déplacements composants. Nous avons vu (n° 284) que la résultante des forces $\frac{\psi}{2}$, qui agissent sur la masse $+m$, et qui proviennent des différents éléments du conducteur fermé C′, est normale au conducteur C, et que, par conséquent, le travail de cette résultante pour le déplacement $u\,dt$ est nul. Pour le déplacement $v\,dt$, le travail est égal à

$$-4a^2 mui'v\,dt \int \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'} \frac{\cos\delta}{\sqrt{r}}\,ds'.$$

La résultante des forces $\frac{\psi}{2}$ qui agissent sur la masse $-m$, étant égale à la première en grandeur et en direction, donne aussi un travail nul pour le déplacement $-u\,dt$, et le même travail pour le déplacement $v\,dt$. Il en résulte que le travail des forces $\frac{\psi}{2}$, qui agissent sur les deux masses $+m$ et $-m$, contenues dans l'élément ds, est

$$-8a^2 mui'v\,dt \int \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s} \frac{\cos\delta}{\sqrt{r}}\,ds'$$

$$= -4a^2 ii'v\,dt\,ds \int \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'} \frac{\cos\delta}{\sqrt{r}}\,ds'.$$

Le travail des forces $\frac{\psi}{2}$, qui agissent sur toutes les masses électriques contenues dans le conducteur C, est donc

$$(26)\qquad d\mathfrak{G}\psi C = -4a^2 ii'dt \int\int \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'} \frac{v\cos\delta}{\sqrt{r}}\,ds\,ds'.$$

Le travail des mêmes forces qui agissent sur toutes les masses électriques contenues dans le conducteur C′ est

$$(27)\qquad d\mathfrak{G}\psi C' = -4a^2 ii'dt \int\int \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,ds'} \frac{v'\cos\delta'}{\sqrt{r}}\,ds\,ds'.$$

Il est évident que la somme de ces deux travaux est le travail des forces électrodynamiques dans le système des deux conducteurs, travail dont nous avons trouvé la valeur $ii'd\mathrm{W}$ au n° **277**. Il est d'ailleurs facile de le vérifier; on a, en effet,

$$v\cos\delta + v'\cos\delta' = -\frac{\partial r}{\partial t},$$

et la somme des travaux précédents a pour expression

$$d\mathfrak{C}\,\psi\mathrm{C} + d\mathfrak{C}\,\psi\mathrm{C}' = 4a^2 ii'dt\int\int\frac{1}{\sqrt{r}}\,\frac{\partial r}{\partial t}\,\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'}\,ds\,ds'.$$

Or, d'après les transformations des n°s **268** et **269**, on a

$$4\,dt\int\int\frac{1}{\sqrt{r}}\,\frac{\partial r}{\partial t}\,\frac{\partial^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}\,ds\,ds' = d\int\int\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\,ds\,ds';$$

il en résulte, avec la définition de la fonction W donnée précédemment (n° **287**),

(28) $$d\mathfrak{C}\,\psi\mathrm{C} + d\mathfrak{C}\,\psi\mathrm{C}' = ii'd\mathrm{W}.$$

Les forces ψ_1 et $-\psi_1$, qui agissent sur les masses $+m$ et $-m$, donnent, pour le déplacement $v\,dt$, des travaux égaux et de signes contraires; on peut donc, dans l'évaluation du travail de ces forces, faire abstraction du mouvement des conducteurs, et l'on est ramené au cas que nous avons traité au n° **287**. Ainsi le travail pendant le temps dt des forces $\pm\psi_1$ est $-\mathrm{W}\,i\,di'$ sur le courant C et $-\mathrm{W}\,i'\,di$ sur le courant C'; en tout $-\mathrm{W}\,d(ii')$.

297. Les forces $+\psi_2$ et $-\psi_2$ qui agissent sur les masses $+m$ et $-m$ donnent de même, pour le déplacement $v\,dt$, des travaux égaux et de signes contraires, et l'on peut encore faire abstraction du déplacement du conducteur C. La somme des projections sur la trajectoire C des forces ψ_2 produites par les différents éléments ds' du circuit C' est

$$-\int_{(\mathrm{C}')}\psi_2\cos\theta = 4ma^2 i'\int_{(\mathrm{C}')}\frac{\cos\theta}{\sqrt{r}}\,\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\,\partial s'}\,ds'$$
$$= 8ma^2 i'\int_{(\mathrm{C}')}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\,\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\,\partial s'}\,ds',$$

et le travail de cette force sur la masse m est, pour le déplacement udt,

$$8a^2 mui'dt \int_{(C')} \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s} \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\, ds'} ds' = 4a^2 ii'\, ds\, dt \int_{(C')} \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s} \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t\, \partial s'} ds'.$$

Le travail exercé sur la masse $-m$ a la même valeur, de sorte que le travail, pendant le temps dt, des forces ψ_2 sur le courant i tout entier est

$$d\mathfrak{T}\,\psi_2 C = 8a^2 ii'\, ds \int\int \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s} \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\, ds'} ds\, ds'.$$

D'après les transformations des n°s 268 et 269, on a encore

$$8\, dt \int\int \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s} \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\, \partial s'} = -d \int\int \frac{\cos\theta \cos\theta'}{r} ds\, ds';$$

il en résulte

$$d\mathfrak{T}\,\psi_2 C = -ii'\, dW. \tag{29}$$

Le travail des forces ψ_2 sur le courant i' a aussi pour expression $-ii'\, dW$.

En résumé, le travail pendant le temps dt des forces électriques que le courant C′ exerce sur le courant C est

$$d\mathfrak{T}\,\psi C - W i\, di' - ii'\, dW;$$

celui des forces que le courant C exerce sur C′ est

$$d\mathfrak{T}\,\psi C' - W i'\, di - ii'\, dW.$$

La somme de ces travaux, c'est-à-dire le travail de l'action mutuelle des deux courants, est, en tenant compte de l'équation (28),

$$-ii'\, dW - W i\, di' - W i'\, di = -d(ii'W). \tag{30}$$

On peut encore écrire l'expression du travail sous la forme

$$-d(ii'W) = ii'\, dW - i\, d(i'W) - i'\, d(iW). \tag{31}$$

Le premier terme du second membre est le travail des forces électrodynamiques, le second $-i\,d(i'W)$ le travail des forces électromotrices dans le circuit C et le dernier $-i'\,d(iW)$ le travail de ces forces électromotrices dans le circuit C′.

Induction d'un courant sur lui-même par le changement de forme du conducteur.

298. Les considérations précédentes peuvent être appliquées à l'action d'un courant sur lui-même, quand le conducteur change de forme, comme un fil flexible, tout en conservant une longueur constante, ou quand il est composé de plusieurs parties solides et mobiles les unes par rapport aux autres. Supposons, comme au n° 288, que les deux courants deviennent égaux et coïncident, et remarquons que le travail de chaque couple d'éléments est compté deux fois; en remplaçant W par $2w$ et divisant par 2, nous aurons, pour le travail des forces électrodynamiques, $i^2 dw$, pour le travail des forces électromotrices, $-2id(iw)$, et, pour le travail de toutes les forces que le courant exerce sur lui-même, $-d(i^2 w)$. Nous conserverons toujours à la quantité $i^2 w$ le nom d'*énergie potentielle du courant*. Si l'on conçoit le conducteur replié sur lui-même de manière à former deux courants égaux et de sens contraires, l'énergie est nulle, parce que $w = 0$. On peut regarder cet état comme l'état initial d'un courant d'intensité i.

Les forces électrodynamiques doivent être regardées comme appliquées au conducteur; à ce conducteur sont appliquées aussi des forces extérieures. Le mouvement sensible du conducteur étant déterminé par les forces électrodynamiques et les forces extérieures, on a

$$(32) \qquad dB = i^2 dw + d\mathfrak{T}\ \text{ext.},$$

B désignant la force vive sensible du conducteur. D'autre part, si l'on considère l'ensemble du courant et du conducteur, on a, en négligeant la force vive des masses électriques,

$$dB + \lambda i^2 dt = E i\, dt - d(i^2 w) + d\mathfrak{T}\ \text{ext.},$$

ou, en vertu de l'équation précédente,

$$\lambda i^2 dt = E i\, dt - d(i^2 w) - i^2 dw,$$

ce qui donne

$$(33) \qquad E i\, dt = \lambda i^2 dt + d(i^2 w) + i^2 dw.$$

299. De l'équation (32) on déduit

$$i^2\, dw = dB - d\mathfrak{T}\ \text{ext}.$$

Sous cette forme on voit que le travail $i^2\, dw$ des forces électrodynamiques est égal au travail extérieur accompli ou reçu par l'appareil, plus la variation de la force vive sensible du conducteur. Afin de simplifier les énoncés, nous comprendrons dans le travail extérieur cette variation de la force vive sensible, en la regardant comme un travail accompli ou reçu, suivant qu'elle est positive ou négative, et nous dirons, d'une manière générale, que le travail des forces électrodynamiques est égal au travail extérieur accompli ou reçu par l'appareil. D'après cela, l'équation (33) signifie que l'action chimique de la pile est égale à l'énergie calorifique dégagée sur le conducteur, plus l'accroissement d'énergie potentielle du courant, plus encore le travail extérieur accompli ou reçu.

On en déduit

$$\left(\lambda + 2\frac{dw}{dt}\right)i + 2w\frac{di}{dt} = \mathrm{E}, \tag{34}$$

ou

$$\lambda i + \frac{d(2wi)}{dt} = \mathrm{E}.$$

Si le potentiel w varie d'une manière uniforme, c'est-à-dire si $\frac{dw}{dt}$ est constant, la force électromotrice E de la pile étant elle-même invariable, l'intensité du courant sera constante et égale à

$$i = \frac{\mathrm{E}}{\lambda + 2\frac{dw}{dt}} = \frac{\frac{\mathrm{E}}{\lambda}}{1 + \frac{2}{\lambda}\frac{dw}{dt}}.$$

On voit par là qu'une augmentation du potentiel w diminue l'intensité du courant et que, au contraire, une diminution de ce potentiel augmente l'intensité du courant.

300. Considérons le potentiel w comme une fonction quelconque du temps et supposons que la force électromotrice E de la pile et la résistance λ du circuit restent constantes.

En posant

$$w = f(t),$$
$$i = \frac{E}{\lambda} + j,$$
$$x = 2wj,$$

l'équation (34) devient

$$(35) \qquad \frac{\lambda}{2f(t)}x + \frac{dx}{dt} = -\frac{2E}{\lambda}f'(t).$$

Supposons que le potentiel w soit resté constant jusqu'à l'époque $t = 0$; les conditions initiales sont alors

$$i_0 = \frac{E}{\lambda}, \quad j_0 = 0, \quad x_0 = 0.$$

Si l'on égale à zéro le second membre de l'équation (35), cette équation a pour intégrale

$$x = AF(t),$$

en posant

$$F(t) = e^{-\frac{\lambda}{2}\int_0^t \frac{d\tau}{f(\tau)}}.$$

La fonction $F(t)$ a une valeur positive inférieure à 1, puisque $f(t)$ est toujours positive, et elle va en diminuant.

Pour avoir l'intégrale complète de l'équation (35), on fera varier le facteur arbitraire A, ce qui donne

$$\frac{dx}{dt} = AF'(t) + F(t)\frac{dA}{dt}.$$

Portant cette valeur et celle de x dans l'équation différentielle, on obtient

$$F(t)\frac{dA}{dt} = -\frac{2E}{\lambda}f'(t).$$

Comme on a $A = 0$ lorsque $t = 0$,

$$A = -\frac{2E}{\lambda}\int_0^t \frac{f'(\tau)}{F(\tau)}d\tau,$$

ce qui donne, pour le courant induit,

$$(36)\qquad j = \frac{x}{2w} = -\frac{\mathrm{E\,F}(t)}{\lambda f(t)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{\mathrm{F}(\tau)} d\tau.$$

Le signe du courant induit est contraire à celui de $f'(t)$, c'est-à-dire à celui de $\frac{dw}{dt}$.

Désignant par θ un nombre compris entre zéro et 1, on a

$$\int_0^t \frac{f'(\tau)}{\mathrm{F}(\tau)} d\tau = \frac{1}{\mathrm{F}(\theta t)} \int_0^t f'(\tau)\, d\tau = \frac{f(t) - f(0)}{\mathrm{F}(\theta t)},$$

d'où

$$(37)\qquad j = -\frac{\mathrm{E}}{\lambda} \frac{\mathrm{F}(t)}{\mathrm{F}(\theta t)} \frac{f(t) - f(0)}{f(t)},$$

et, puisque $\mathrm{F}(t)$ est plus petit que $\mathrm{F}(\theta t)$, la valeur absolue du courant induit est moindre que $\frac{\mathrm{E}}{\lambda} \frac{\Delta w}{w}$.

Remarque. — Si, après avoir varié depuis l'époque $t = 0$ jusqu'à l'époque t', le potentiel w reste ensuite constant, on aura, pour des valeurs de t plus grandes que t',

$$\int_0^t \frac{d\tau}{f(\tau)} = \int_0^{t'} \frac{d\tau}{f(\tau)} + \int_{t'}^t \frac{d\tau}{f(\tau)} = a + \frac{t - t'}{f(t')},$$

d'où

$$\mathrm{F}(t) = e^{-\frac{\lambda a}{2}} e^{-\frac{\lambda(t - t')}{f(t')}}$$

et

$$(38)\qquad j = -\frac{\mathrm{E}}{\lambda} \frac{\mathrm{F}(t)}{f(t')} \int_0^{t'} \frac{f'(\tau)}{\mathrm{F}(\tau)} d\tau.$$

Comme la fonction $\mathrm{F}(t)$ tend vers zéro, le courant induit j tend vers zéro, et le courant principal tend à reprendre sa valeur initiale

$$i = \frac{\mathrm{E}}{\lambda}.$$

Induction entre deux courants par le mouvement des conducteurs.

301. Considérons le cas général de deux courants fermés i et i' dans des conducteurs mobiles et déformables. Le travail de toutes les forces que le premier courant exerce sur lui-même est $-d(i^2 w)$. De même, pour le deuxième courant, le travail est $-d(i'^2 w)$. Le travail de toutes les forces qui s'exercent entre les deux courants est $-d(ii'W)$. Le travail total est

$$-d(i^2 w + i'^2 w' + ii'W).$$

La quantité

$$i^2 w + i'^2 w' + ii'W$$

est l'énergie potentielle du système. C'est le travail que le système développerait si chacun des deux courants se repliait sur lui-même, de manière à former deux courants égaux et de sens contraires, car alors on aurait $w = 0$, $w' = 0$, $W = 0$. Le mouvement sensible de chacun des conducteurs C et C' étant déterminé par les forces électrodynamiques et les forces extérieures qui lui sont appliquées, on a

$$dB = i^2 dw + d\mathfrak{G}\,\psi C + d\mathfrak{G}\,\text{ext.}\,C,$$
$$dB' = i'^2 dw' + d\mathfrak{G}\,\psi C' + d\mathfrak{G}\,\text{ext.}\,C',$$

ψ désignant les forces électrodynamiques provenant de l'action mutuelle des deux courants, et, par suite,

$$dB + dB' = i^2 dw + i'^2 dw' + ii'\,dW + d\mathfrak{G}\,\text{ext.},$$

le dernier terme désignant le travail des forces extérieures qui agissent sur les deux conducteurs. On en déduit

$$i^2 dw + i'^2 dw' + ii'\,dW = dB + dB' - d\mathfrak{G}\,\text{ext.}$$

n comprenant dans le travail extérieur la variation de la force ve sensible, comme nous l'avons fait précédemment, nous rons encore que le travail $i^2 dw + i'^2 dw' + ii'\,dW$ des forces ectrodynamiques est égal au travail extérieur accompli ou u par l'appareil.

Considérons maintenant le conducteur C et le courant i qui

le parcourt; le théorème des forces vives, appliqué à l'ensemble, donne l'équation

$$dB + \lambda i^2 dt = E i dt - d(i^2 w) + [d\mathfrak{C} \psi C - id(i' W)] + d\mathfrak{C}\,\text{ext.C}.$$

Le premier membre est la variation de la force vive totale, le second membre contient l'action chimique de la première pile, le travail du premier courant sur lui-même (n° 298), le travail du second sur le premier (n° 297), et enfin le travail des forces extérieures qui agissent sur le premier conducteur. En vertu de l'une des équations précédentes, cette équation se réduit à

$$(39) \qquad \lambda i^2 dt = E i dt - 2 i d(iw) - i d(i' W).$$

Cette équation, mise sous la forme

$$E i dt - 2 i d(iw) - i d(i' W) = \lambda i^2 dt,$$

signifie que le travail de la pile, plus le travail des forces électromotrices provenant de l'action du courant sur lui-même et de celle que le second exerce sur le premier, est égal à la chaleur dégagée. En écrivant

$$E - 2\frac{d(iw)}{dt} - \frac{d(i' W)}{dt} = \lambda i,$$

on voit que la force électromotrice d'induction est

$$(40) \qquad E_1 = -2\frac{d(iw)}{dt} - \frac{d(i' W)}{dt}.$$

On a de même, pour le second courant,

$$(41) \qquad \lambda' i'^2 dt = E' i' dt - 2 i' d(i' w') - i' d(i W).$$

En ajoutant membre à membre les deux équations (39) et (41), on obtient

$$(42) \quad \begin{cases} E i dt + E' i' dt = \lambda i^2 dt + \lambda' i'^2 dt \\ \qquad\qquad + d(i^2 w + i'^2 w' + i i' W) \\ \qquad\qquad + (i^2 dw + i'^2 dw' + i i' dW). \end{cases}$$

Cette équation signifie que la somme des actions chimiques

fournies par les piles est égale à l'énergie calorifique dégagée sur les conducteurs, plus l'accroissement de l'énergie potentielle du système, plus encore le travail extérieur accompli ou reçu.

302. Des deux équations (39) et (41) on déduit

$$(43)\quad \begin{cases} i = i_1 - \dfrac{2}{\lambda'}\dfrac{d(iw)}{dt} - \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{d(i'W)}{dt}, \\ i' = i'_1 - \dfrac{2}{\lambda}\dfrac{d(i'w')}{dt} - \dfrac{1}{\lambda'}\dfrac{d(iW)}{dt}, \end{cases}$$

i_1 et i'_1 représentant les valeurs $\frac{E}{\lambda}$ et $\frac{E'}{\lambda'}$ relatives à un régime permanent. Afin de mettre en évidence ce second mode d'induction, nous supposerons les forces électromotrices constantes et les conducteurs de forme invariable. Quand il n'y a pas de mouvement relatif, W étant constant, les intensités prennent les valeurs constantes i_1 et i'_1. La même chose a lieu lorsque l'appareil passe par une position pour laquelle le potentiel W est maximum ou minimum; car, la dérivée $\frac{dW}{dt}$ devenant nulle, les équations précédentes sont vérifiées par les valeurs $i = i_1$, $i' = i'_1$, $\frac{di}{dt} = 0$, $\frac{di'}{dt} = 0$.

Ces équations (43) deviennent d'ailleurs

$$i + \frac{1}{\lambda}\frac{dW}{dt}i' = i_1 - \frac{2w}{\lambda}\frac{di}{dt} - \frac{W}{\lambda}\frac{di'}{dt},$$

$$i' + \frac{1}{\lambda'}\frac{dW}{dt}i = i'_1 - \frac{2w'}{\lambda'}\frac{di'}{dt} - \frac{W}{\lambda'}\frac{di}{dt},$$

$$i = \frac{i_1 - \frac{1}{\lambda}\frac{dW}{dt}i'_1 - \frac{2w}{\lambda}\frac{di}{dt} - \frac{W}{\lambda}\frac{di'}{dt} + \frac{1}{\lambda}\frac{dW}{dt}\left(\frac{2w'}{\lambda'}\frac{di'}{dt} + \frac{W}{\lambda'}\frac{di}{dt}\right)}{1 - \frac{1}{\lambda\lambda'}\left(\frac{dW}{dt}\right)^2},$$

$$i' = \frac{i'_1 - \frac{1}{\lambda'}\frac{dW}{dt}i_1 - \frac{2w'}{\lambda'}\frac{di'}{dt} - \frac{W}{\lambda'}\frac{di}{dt} + \frac{1}{\lambda'}\frac{dW}{dt}\left(\frac{2w}{\lambda}\frac{di}{dt} + \frac{W}{\lambda}\frac{di'}{dt}\right)}{1 - \frac{1}{\lambda\lambda'}\left(\frac{dW}{dt}\right)^2}.$$

Les forces électromotrices des piles étant constantes, si le potentiel W varie d'une manière uniforme, les intensités sont constantes et égales à

$$(44)\qquad i = \frac{i_1 - \frac{1}{\lambda}\frac{dW}{dt} i'_1}{1 - \frac{1}{\lambda\lambda'}\left(\frac{dW}{dt}\right)^2}, \quad i' = \frac{i'_1 - \frac{1}{\lambda'}\frac{dW}{dt} i_1}{1 - \frac{1}{\lambda\lambda'}\left(\frac{dW}{dt}\right)^2}.$$

303. Dans le cas particulier où le second conducteur ne renferme pas de pile, $i'_1 = 0$, et ces équations se réduisent à

$$(45)\qquad i = \frac{i_1}{1 - \frac{1}{\lambda\lambda'}\left(\frac{dW}{dt}\right)^2}, \quad i' = \frac{-\frac{1}{\lambda'}\frac{dW}{dt}}{1 - \frac{1}{\lambda\lambda'}\left(\frac{dW}{dt}\right)^2} i_1.$$

Lorsque le dénominateur est positif, i' est de signe contraire à $\frac{dW}{dt}$ et $i > i_1$.

Supposons, comme au n° 292, que l'on ait déterminé le potentiel W en prenant dans le conducteur C le sens du courant i, et dans le conducteur C' un sens tel que le potentiel ait une valeur positive. On voit qu'une diminution du potentiel W fait naître, dans le conducteur C', un courant de même sens et qu'une augmentation fait naître un courant de sens contraire. Une augmentation ou une diminution du potentiel produit donc le même effet qu'une augmentation ou une diminution dans l'intensité du courant inducteur.

Moteurs électriques et machines électromotrices.

304. L'appareil que nous venons d'étudier, et qui est formé de deux conducteurs mobiles, dans lesquels circulent des courants i et i', peut servir de machine motrice. Supposons que le mouvement des conducteurs soit périodique, comme cela a lieu dans la plupart des machines, et soit T la durée de la période. La force vive sensible des conducteurs reprenant la même valeur, le travail des forces électrodynamiques, pendant chaque période, est égal à celui des forces extérieures

et de signe contraire. Pour évaluer le potentiel W, nous imaginons deux courants d'intensité 1, parcourant, l'un le conducteur C dans le sens même du courant i, l'autre le conducteur C′ dans un sens choisi à volonté; pendant une période, le potentiel W passe par un minimum W_1 et par un maximum W_2. Pour que la machine fonctionne utilement, il est nécessaire de changer alternativement le signe de l'un des courants, par exemple du courant i'. Quand la machine va de la position du minimum à celle du maximum, dW ayant une valeur positive, on fait marcher le courant i' dans le conducteur C′ dans le sens choisi pour l'évaluation de W; de cette manière, l'intensité i' devant être regardée comme positive, le travail $ii'dW$ des forces électrodynamiques est positif. Mais, quand la machine va de la position du maximum à celle du minimum, dW ayant une valeur négative, on fait marcher le courant dans le conducteur C′ en sens inverse de la direction précédente; l'intensité i' devant alors être regardée comme négative, le travail $ii'dW$ des forces électrodynamiques est encore positif. On rétablit alors le sens primitif du courant dans le conducteur C′, et ainsi de suite.

Il est évident que le changement de sens d'un courant s'opère d'une manière continue, quoique dans un temps très court, et que par conséquent l'intensité i' devient nulle à chaque inversion. Si l'on intègre l'équation (42) pour une période du mouvement, on aura

$$(46) \qquad \int_0^T (\mathrm{E}i + \mathrm{E}'i')\,dt = \int_0^T (\lambda i^2 + \lambda' i'^2)\,dt + \int_0^T ii'\,d\mathrm{W}.$$

Ainsi l'action chimique des piles, pendant chaque période, est égale à l'énergie calorifique dégagée sur les conducteurs, plus le travail extérieur accompli.

305. Une pile suffit pour faire fonctionner la machine. On peut, en effet, disposer l'appareil de manière que le même courant parcoure les deux conducteurs C et C′, et que le sens du courant soit changé alternativement dans le conducteur C′. Pendant la première phase du mouvement, on aura $i' = i$ et, pendant la seconde, $i' = -i$. L'équation (42) donne, pour la

première phase, en représentant toujours par i_1 l'intensité $\frac{E}{\lambda+\lambda'}$, et supposant les conducteurs de forme invariable,

$$(47)\qquad i = i_1 - \frac{2(w+w')}{\lambda+\lambda'}\frac{di}{dt} - \frac{2}{\lambda+\lambda'}\frac{d(iW)}{dt},$$

et, pour la seconde phase,

$$(48)\qquad i = i_1 - \frac{2(w+w')}{\lambda+\lambda'}\frac{di}{dt} + \frac{2}{\lambda+\lambda'}\frac{d(iW)}{dt}.$$

Si la force électromotrice est constante et qu'on néglige les variations de l'intensité i dans le second membre, on a la formule approchée

$$(49)\qquad i = i_1 \mp \frac{2i_1}{\lambda+\lambda'}\frac{dW}{dt},$$

le signe supérieur se rapportant à la première phase, le signe inférieur à la seconde; mais, comme $\frac{dW}{dt}$ est positif dans le premier cas, négatif dans le second, l'intensité i, variable pendant le jeu de la machine, est constamment moindre que l'intensité constante i_1 que produirait la pile si la machine était en repos, et elle est d'autant plus petite que la valeur absolue de $\frac{dW}{dt}$ est plus grande, c'est-à-dire que la machine marche plus vite.

L'équation (46), appliquée aux deux phases d'une période, donne

$$\int_0^T i^2 dW = \int_0^T i[E-(\lambda+\lambda')i]dt;$$

l'énergie transformée en travail est égale à l'excès du travail des actions chimiques sur la chaleur dégagée dans les conducteurs. En désignant par I_1 l'intensité moyenne du courant et I_2^2 le carré moyen de l'intensité pendant chaque phase, on a

$$\int_0^T i^2\, dW = (\lambda+\lambda')(i_1 I_1 - I_2^2)T.$$

Cette expression est déterminée dans chaque cas particulier par la loi du mouvement.

Si l'on appelle i_m une valeur moyenne de i, définie par la condition $i_m(i_1 - i_m) = i_1 I_1 - I_2^2$, l'expression du travail pendant une période peut être mise sous la forme

$$(\lambda + \lambda')\, i_m (i_1 - i_m) \mathrm{T}.$$

Le travail pendant l'unité de temps

$$(\lambda + \lambda')\, i_m (i_1 - i_m)$$

est maximum lorsque, pour un circuit déterminé, le jeu de la machine est réglé de telle sorte que l'on ait $i_m = \frac{i_1}{2}$.

Le coefficient économique de la machine, ou le rapport de l'énergie chimique transformée en travail à l'énergie totale dépensée par la pile est

$$\frac{\int_0^{\mathrm{T}} [\mathrm{E}i - (\lambda + \lambda') i^2]\, dt}{\int_0^{1} \mathrm{E}\, i\, dt} = 1 - \frac{I_2^2}{i_1 I_1} = 1 - \frac{i_{m'}}{i_1},$$

$i_{m'}$ étant aussi une valeur moyenne de i définie par le rapport $\frac{I_2^2}{I_1}$. On peut rendre ce coefficient économique aussi voisin de l'unité que l'on veut, et par conséquent la machine parfaite au point de vue théorique. Il suffit pour cela que l'intensité i soit très petite, ce qui a lieu quand la machine marche très vite; mais alors la quantité de travail produite dans l'unité de temps est aussi très petite, ce qui rend l'avantage illusoire.

306. Pour réaliser une machine inverse, c'est-à-dire un électromoteur, avec deux conducteurs C et C′ fermés et séparés l'un de l'autre, il suffit d'une pile E interposée dans le conducteur C; le mouvement périodique des conducteurs, mouvement produit par des forces extérieures, donne naissance à un courant marchant dans le conducteur C′, alterna-

tivement dans un sens et dans l'autre. D'après la seconde des équations (45), on a d'une manière approximative

$$i' = -\frac{i_1}{\lambda'}\frac{d\mathrm{W}}{dt}.$$

Quand l'appareil va de la position où le potentiel est maximum à celle où il est minimum, l'intensité i' ayant une valeur positive, le courant induit marche dans le sens qui a été choisi pour évaluer le potentiel W; mais, lorsque l'appareil va de la position du minimum à celle du maximum, le courant i' change de signe et marche en sens contraire. De cette manière, et par le jeu naturel de la machine, le travail des forces électrodynamiques $ii'd\mathrm{W}$ est toujours négatif. Dans chacune des phases du mouvement, la machine reçoit un travail extérieur qui est transformé en énergie électrique, laquelle se dépense sous une forme quelconque, chaleur, lumière, décompositions chimiques, etc.

307. On obtient aussi une machine motrice en faisant réagir sur un courant produit par une pile un aimant naturel ou un électro-aimant. Le travail des forces électrodynamiques qui s'exercent entre un courant fermé i et un aimant a pour expression $i d\mathrm{W}$ (n° 273), W étant un certain potentiel qui dépend de la position relative du courant et de l'aimant. Le mouvement étant périodique, le potentiel passe par un minimum W_1 et un maximum W_2. Afin d'avoir toujours un travail positif, on changera alternativement le sens du courant.

La machine inverse n'exige pas de pile; le mouvement relatif de l'aimant et du conducteur fait naître dans celui-ci un courant induit, qui change de sens alternativement, de manière que le travail des forces électrodynamiques $i d\mathrm{W}$ soit toujours négatif.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

PRÉLIMINAIRES.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT DES SYSTÈMES.

PREMIÈRE PARTIE.

THERMODYNAMIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

ÉTUDE DES PHÉNOMÈNES THERMIQUES.

CHAPITRE II.

THÉORÈME DE CARNOT.

CHAPITRE III.

RELATIONS ENTRE LES PROPRIÉTÉS PHYSIQUES D'UNE SUBSTANCE.

CHAPITRE IV.

PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DES GAZ.

CHAPITRE V.

CHALEURS LATENTES DANS LES CHANGEMENTS D'ÉTAT.

CHAPITRE VI.

MACHINES A FEU.

CHAPITRE VII.

ÉCOULEMENT DES FLUIDES.

CHAPITRE VIII.

THÉORIE MÉCANIQUE DES GAZ.

CHAPITRE IX.

APPLICATIONS A LA MÉCANIQUE CÉLESTE.

CHAPITRE X.

CAPILLARITÉ.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉLECTRICITÉ.

CHAPITRE PREMIER.

ÉLECTROSTATIQUE.

CHAPITRE II.

TRAVAIL DES FORCES ÉLECTRIQUES.

CHAPITRE III.

HYPOTHÈSES DES FLUIDES ÉLECTRIQUES.

CHAPITRE IV.

THÉORIE DES COURANTS ÉLECTRIQUES.

CHAPITRE V.

PILE ÉLECTRIQUE.

CHAPITRE VI.

COURANTS THERMO-ÉLECTRIQUES.

CHAPITRE VII.

MAGNÉTISME.

CHAPITRE VIII.

ÉLECTROMAGNÉTISME ET ÉLECTRODYNAMIQUE.

CHAPITRE IX.

PHÉNOMÈNES D'INDUCTION.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

6826 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

ENVOI FRANCO DANS TOUTE L'UNION POSTALE CONTRE MANDAT DE POSTE OU VALEUR SUR PARIS.

ANDRÉ et RAYET, Astronomes adjoints de l'Observatoire de Paris, et **ANGOT**, Professeur de Physique au Lycée de Versailles. — **L'Astronomie pratique et les Observatoires en Europe et en Amérique**, depuis le milieu du XVIIe siècle jusqu'à nos jours. In-18 jésus, avec belles figures dans le texte et planches en couleur.

Ire PARTIE : *Angleterre*; 1874 .... 4 fr. 50 c.
IIe PARTIE : *Écosse, Irlande et Colonies anglaises*; 1874 4 fr. 50 c.
IIIe PARTIE : *Amérique du Nord*; 1877 .... 4 fr. 50 c.
IVe PARTIE : *Amérique du Sud et Météorologie américaine*; 1881 .... 3 fr.
Ve PARTIE : *Italie*; 1878 .... 4 fr. 50 c.

ANNALES DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS, fondées par *U.-J. Le Verrier*, et publiées par M. l'Amiral *Mouchez*, Directeur. **Partie théorique**, Tomes I à XVI. In-4, avec planches; 1855-1882.

Les Tomes I à X et les Tomes XII, XIII, XV et XVI se vendent séparément. 27 fr.

Le Tome XI (1876) et le Tome XIV (1877) comprennent deux *Parties* qui se vendent séparément .... 20 fr.

ANNALES DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS, fondées par *U.-J. Le Verrier*, et publiées par M. l'Amiral *Mouchez*, Directeur. **Observations**. Tomes I à XXXIV, années 1800 à 1879. 34 volumes in-4 (en Tableaux); 1858 à 1882.

Chaque Volume se vend séparément .... 40 fr.

ANNALES DU BUREAU DES LONGITUDES ET DE L'OBSERVATOIRE ASTRONOMIQUE DE MONTSOURIS. Tome I. In-4, avec une planche sur acier donnant la vue de l'Observatoire; 1877 (*Rare*) .... 40 fr.
Tome II. In-4; 1883 .... 20 fr.
Tome III. In-4; 1883 .... 20 fr.

ANNALES DE L'OBSERVATOIRE ASTRONOMIQUE, MAGNÉTIQUE ET MÉTÉOROLOGIQUE DE TOULOUSE. Tome I, renfermant les travaux exécutés de 1873 à la fin de 1878, sous la direction de M. *F. Tisserand*, ancien Directeur de l'Observatoire de Toulouse, Membre de l'Institut, etc.; publié par M. *Baillaud*, Directeur de l'Observatoire, Doyen de la Faculté des Sciences de Toulouse. In-4, avec planche; 1881 .... 30 fr.

ANNUAIRE pour l'an 1883, publié par le Bureau des Longitudes, contenant les Notices suivantes : *Sur la figure des comètes*, par M. FAYE, Membre de l'Institut. — *Les Méthodes en Astronomie*, par M. Janssen, Membre de l'Institut (Congrès de la Rochelle). — *La prochaine éclipse totale de Soleil du 6 mai* 1883, par M. JANSSEN, Membre de l'Institut. In-18, de 800 pages environ, avec figures dans le texte et carte des courbes d'égale déclinaison magnétique en France.

Broché .... 1 fr. 50 c.
Cartonné .... 2 fr.

Pour recevoir l'*Annuaire* franco ajouter 35 c.

ANNUAIRE DE L'OBSERVATOIRE MÉTÉOROLOGIQUE DE MONTSOURIS pour 1883; Météorologie, Agriculture, Hygiène (contenant le résumé des travaux de l'Observatoire durant l'année 1882). 12ᵉ année. In-18 de 550 pages, avec des figures représentant les divers organismes microscopiques rencontrés dans l'air, le sol et leurs eaux......... 2 fr.

Notices: *Météorologie agricole;* par M. MARIÉ-DAVY. — *Résumé météorologique des années agricoles* 1873 *à* 1882; par M. L. DESCROIX. — *Analyse de l'air, des eaux météoriques, des eaux d'égout et des eaux courantes;* par M. ALBERT LÉVY. — *Nouvelles recherches sur les bactéries atmosphériques, effectuées à l'Observatoire de Montsouris;* par M. le Dʳ MIQUEL.

BERRY (C.), Lieutenant de vaisseau. — **Théorie complète des occultations, à l'usage spécial des officiers de Marine et des astronomes.** Publication approuvée par le Bureau des Longitudes et autorisée par M. le Ministre de la Marine et des Colonies. In-4, avec figures; 1880. 6 fr.

BIOT (J.-B.), Membre de l'Institut (Académie des Sciences). — **Traité élémentaire d'Astronomie physique.** 5 forts vol. in-8 avec 94 planches. 5ᵉ édition, corrigée et augmentée; 1857..................... 40 fr.

BUREAU CENTRAL MÉTÉOROLOGIQUE DE FRANCE. — Instructions météorologiques, suivies de *Tables diverses pour la réduction des observations.* 2ᵉ édition. In-8, avec belles figures dans le texte; 1881. 2 fr. 50 c.

COMOY, Inspecteur général des Ponts et Chaussées en retraite, Commandeur de la Légion d'honneur. — **Étude pratique sur les marées fluviales, et notamment sur le mascaret**; *Application aux travaux de la partie maritime des fleuves.* Vol. grand in-8, avec figures dans le texte et atlas de 10 planches... 15 fr.

DECANTE, Lieutenant de vaisseau. — **Tables du cadran solaire azimutal pour tous les points situés entre les cercles polaires.** *Variation automatique. Détermination instantanée du relèvement vrai. Contrôle de la route.* 2 vol. in-8; 1882.................................. 5 fr.

DIEN et **FLAMMARION. — Atlas céleste,** comprenant toutes les Cartes de l'ancien Atlas de **Ch. Dien,** rectifié, augmenté et enrichi de 5 Cartes nouvelles relatives aux principaux objets d'études astronomiques, par **C. Flammarion,** avec une *Instruction* détaillée pour les diverses Cartes de l'Atlas. In-folio, cartonné avec luxe, de 31 planches gravées sur cuivre, dont 5 doubles. 3ᵉ édition; 1877.

PRIX { EN FEUILLES, dans une couverture imprimée. 40 fr.
PRIX { CARTONNÉ AVEC LUXE, toile pleine......... 45 fr.

Pour recevoir franco, par poste, dans tous les pays de l'Union postale, l'ATLAS *en feuilles,* soigneusement enroulé et enveloppé, ajouter.................................. 2 fr.

Les dimensions (0ᵐ,50 sur 0ᵐ,35) de l'ATLAS *cartonné* ne permettant pas de l'expédier par la poste, cet Atlas *cartonné,* dont le poids est de 2ᵏᵍ,9, sera envoyé, aux frais du destinataire, soit par messageries grande vitesse, soit par tout autre mode indiqué.

On vend séparément :

Fascicule contenant les 5 Cartes nouvelles de l'Atlas céleste.. 15 fr.

Ces Cartes sont renfermées dans une couverture imprimée, avec l'*Instruction* composée pour la nouvelle édition de l'Atlas : I. Mouvements propres séculaires des Étoiles (Carte double); — II. Carte générale des Étoiles multiples, montrant leur distribution dans le Ciel (Carte double); — III. Étoiles multiples en mouvement relatif certain; — IV. Orbites d'Étoiles doubles et groupes d'Étoiles les plus curieux du Ciel; — V. Les plus belles nébuleuses du Ciel.

DISLERE (**P.**). — **La Guerre d'escadre et la Guerre de côtes** (*Les nouveaux navires de combat*). 2[e] édition, augmentée d'un *Appendice* par M. GUICHARD, Ingénieur des constructions navales. Un beau volume grand in-8, avec nombreuses figures dans le texte; 1883.............. 7 fr.

FAYE (**H.**), Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes. — **Cours d'Astronomie nautique**. In-8, avec figures dans le texte; 1880.. 10 fr.

FAYE (**H.**). — **Cours d'Astronomie de l'École Polytechnique.** 2 beaux volumes grand in-8, avec nombreuses figures et cartes dans le texte.

I[re] PARTIE : *Astronomie sphérique. — Géodésie et Géographie mathématique;* 1881 .... 12 fr. 50 c.

II[e] PARTIE : *Astronomie solaire. — Théorie de la Lune. — Navigation;* 1883 .... 14 fr.

FLAMMARION (**Camille**), Astronome. — **Catalogue des Étoiles doubles et multiples en mouvement relatif certain**, comprenant *toutes les observations* faites sur chaque couple depuis sa découverte et les *résultats conclus* de l'étude des mouvements. Grand in-8; 1878........... 8 fr.

L'ASTRONOMIE, Revue mensuelle d'Astronomie populaire, de Météorologie et de Physique du globe, donnant l'exposé permanant des découvertes et des progrès réalisés dans la connaissance de l'Univers; publiée par CAMILLE FLAMMARION, avec le concours des principaux Astronomes français et étrangers. La *Revue* paraît le 1[er] de chaque mois, depuis le 1[er] mars 1882, par numéros de 32 à 40 pages, avec nombreuses figures.

II[e] ANNÉE, 1883. — PRIX DE L'ABONNEMENT:

Paris : 12 fr. — Départements : 13 fr. — Étranger : 14 fr.

Prix du numéro 1 fr. 20 c.

1[re] ANNÉE, 1882. — PRIX DU VOLUME:

Broché: 10 fr. — Relié avec luxe: 14 fr.

Un numéro est envoyé gratuitement, comme spécimen.

LŒWY (**M.**), Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes. — **Ephémérides des Etoiles de culmination lunaire et de longitude pour 1883.** In-4 en tableaux; 1882.. 3 fr.

LOOMIS (**Elias**), Professeur de Philosophie naturelle à l'*Yale College* (États-Unis). — **Mémoires de Météorologie dynamique.** Exposé des résultats de la discussion de Cartes du temps des États-Unis ainsi que d'autres documents. Traduit de l'anglais par M. *H. Brocard*, ancien élève de l'École Polytechnique, Capitaine du Génie. Grand in-8, avec figures dans le texte et 18 planches; 1880.. 3 fr.

MADAMET, Ingénieur de la Marine, sous-directeur de l'École d'application du Génie maritime. — **Traité et Aide-Mémoire des déviations des compas.** 1 vol. grand in-8, suivi de Tables numériques, et un Atlas du même format contenant 16 pl.; 1882.. .... 10 fr.

MARINE A L'EXPOSITION UNIVERSELLE DE 1878 (**LA**). Ouvrage publié par ordre de M. le Ministre de la Marine et des Colonies. Deux beaux volumes grand in-8°, avec 102 figures dans le texte, et deux Atlas in-plano contenant 161 planches; 1879...................... 80 fr.

MAYEVSKI (**le Général**), Membre du Comité de l'Artillerie russe, professeur de Balistique à l'Académie d'Artillerie de Saint-Pétersbourg. — **Traité de Balistique extérieure.** Grand in-8, avec planches et tableaux; 1872 .... 18 fr.

MOUREAUX (**Th.**), Météorologiste au Bureau central. — **La Météorologie appliquée à la prévision du temps.** Leçon faite à l'École supérieure de Télégraphie par M. *E. Mascart*, Directeur du Bureau central météorologique de France, recueillie par M. *Th. Moureaux*. In-18 avec 16 planches en couleur; 1881 .... 2 fr.

PARIS (vice-amiral), Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, Conservateur du Musée de Marine. — **Souvenirs de marine. Collection de plans ou dessins de navires et de bateaux anciens et modernes existants ou disparus** *avec les éléments nécessaires à leur construction*. Un bel album relié de 60 planches in-folio; 1882 .... 25 fr.

SCOTT (**Robert-H.**), Directeur du Service météorologique de l'Angleterre. — **Cartes du temps et avertissements de tempêtes.** Ouvrage traduit de l'anglais par MM. *Zurcher* et *Margollé*. Petit in-8, avec nombreuses figures dans le texte, et 2 planches en couleur; 1879 .... 4 fr. 50 c.

SECCHI (**le P. A.**), Directeur de l'Observatoire du Collège Romain, Correspondant de l'Institut de France. — **Le Soleil.** 2ᵉ édition. PREMIÈRE ET SECONDE PARTIE. Deux beaux volumes grand in-8, avec Atlas; 1875-1877.

Prix des deux volumes achetés ensemble .... 30 fr.

On vend séparément :

Iʳᵉ Partie. Un volume grand in-8, avec 150 figures dans le texte et un Atlas comprenant 6 grandes Planches gravées sur acier (I. *Spectre ordinaire du Soleil* et *Spectre d'absorption atmosphérique*. — II. *Spectre de diffraction*, d'après la photographie de M. HENRY DRAPER. — III, IV, V et VI. *Spectre normal du Soleil*, d'après ANGSTRÖM, et *Spectre normal du Soleil, portion ultra-violette*, par M. A. CORNU); 1875 .... 18 fr.

IIᵉ Partie. Un volume grand in-8, avec nombreuses figures dans le texte, et 13 Planches dont 12 en couleur. (I à VIII. *Protubérances solaires*. — IX. *Type de tache du Soleil*. — X et XI. *Nébuleuses*, etc. — XII et XIII. *Spectres stellaires*); 1877 .... 18 fr.

SOUCHON (**Abel**), membre adjoint du Bureau des Longitudes, attaché à la rédaction de la *Connaissance des Temps*. — **Traité d'Astronomie pratique**, comprenant l'EXPOSITION DU CALCUL DES ÉPHÉMÉRIDES ASTRONOMIQUES ET NAUTIQUES, d'après les méthodes en usage dans la composition de la *Connaissance des Temps* et du *Nautical Almanac*, avec une INTRODUCTION HISTORIQUE et de nombreuses Notes. Grand in-8, avec figures dans le texte et Tables; 1883 .... 15 fr.

Ce Traité s'adresse principalement aux élèves des observatoires, aux calculateurs d'Éphémérides et aux marins; mais il pourra être lu avec fruit par toutes les personnes qui voudront se familiariser avec les méthodes et les calculs de l'Astronomie pratique. Les auditeurs des Cours des Facultés, en particulier les candidats à la Licence ainsi que les élèves de nos grandes Écoles, y puiseront des connaissances très utiles.

YVON VILLARCEAU, Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, et **AVED DE MAGNAC**, Lieutenant de vaisseau. — **Nouvelle navigation astronomique.** (L'heure du premier méridien est déterminée par l'emploi seul des chronomètres.) THÉORIE et PRATIQUE. Un beau vol. in-4, avec planches; 1877 .... 20 fr.

On vend séparément :

THÉORIE, par M. *Yvon Villarceau* .... 10 fr.

PRATIQUE, par M. *Aved de Magnac* .... 12 fr.

8786 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.



